Epsilon
Tạp chí online của cộng đồng những người yêu toán

"Lực Coriolis sẽ cho chúng ta biết được lịch sử hình thành các gò đất để khớp với các quyết định chọn Kinh Thành của các vương triều Việt Nam trong lịch sử"
Nguyễn Lê Anh - Lực Coriolis và lịch sử dòng chảy sông Hồng

"Để trở thành nhà Toán học chuyên nghiệp, và có thể sống tốt, sống tự do bằng nghề, đòi hỏi tài năng, sự đam mê dài hạn, và khá nhiều may mắn nữa. Cũng như nhiều ngành nghề khác. Đó là một đặc ân hiếm hoi của cuộc đời."
Đào Hải Long - Tự Do

ỨNG DỤNG CỦA TRƯỜNG HỮU HẠN VÀO GIẢI BÀI TOÁN DÃY SỐ
Dương Thái Bảo

GIẢI MỘT SỐ BÀI TOÁN HÌNH HỌC PHẲNG NHỜ PHÉP QUAY VÀ GEOGEBRA
Nguyễn Hoàng Vũ và cộng sự

VÀ CÁC CHUYÊN MỤC KHÁC

No. 22
13.08

Epsilon

Tạp chí online của cộng đồng những người yêu toán

LỜI NGỎ

Chúng tôi tiếp tục Epsilon số này bằng một lời ngỏ đặc biệt: lời tâm tình của thầy Đào Hải Long dành cho các học sinh Việt Nam vừa đạt kết quả xuất sắc ở Kỳ thi Olympic Toán quốc tế 2022.

* * *

Chúc mừng các em về thành tích xuất sắc của mình. Điều đó cũng có nghĩa từ nay, các em sẽ phải đối đầu với nhiều áp lực. Mình muốn nói với các em điều này:

- Hãy để tài năng, thành tích là công cụ để chúng ta có thêm sự tự do, chứ đừng để người khác biến nó thành xiềng xích trên người mình.

Hồi mình đi thi, có nhiều nhà báo đến nhà muốn khai thác khía cạnh mẹ đơn thân, biến mình thành tấm gương nghèo vượt khó. Mình bảo ngay:

- Nghèo bây giờ không có tiền đi học thêm thì khó mà vào đội tuyển đấy!

Thế là các anh chị nhà báo nản, bỏ đi hết. Một lần khác, trả lời phỏng vấn về mơ ước tương lai, mình nói:

- Em muốn làm một con người hạnh phúc trong một đất nước thịnh vượng!

Sau đó có một anh chàng nhà báo viết bài "chê" mình, vì không chịu "truyền cảm hứng" lớn lao hơn cho các bạn trẻ. Mình kệ.

Đa phần những tung hô của người đời dành cho các tấm gương xuất sắc trong mọi lãnh vực xuất phát từ sự tị nạnh của những cá nhân tầm thường, họ muốn dùng những thành tích đó để buộc những kẻ may mắn kia vào những kỳ vọng, những "cái hộp" mà họ tự đặt ra (kiểu như hoa hậu ngủ không được dạng chân), để kìm hãm sự tự do của những kẻ đó. Cần cẩn thận với những sự kìm hãm ấy, nhiều khi chính từ gia đình bạn bè mình.

Khi cho con mình chơi tennis, chúng nó sau hai năm có thành tích khá tốt, vượt qua nhiều bạn có điều kiện, tập thầy chuyên nghiệp đã 4,5 năm. Nhưng mình không bao giờ hỏi chúng nó "hôm nay con đánh thắng hay thua?". Mình bảo: - Các con có thể tự thấy đấy, rất nhiều bạn xung quanh, Tây hay Tàu, bị ràng buộc vào những mục tiêu, giấc mơ vào trường tốt, hay theo quần vợt chuyên nghiệp, hoặc thắng nhiều giải, được xếp hạng cao, v.v. Vì thế các bạn ý luôn rất căng thẳng. Đối với bố mẹ, tài năng đơn giản là cho các con thêm sự lựa chọn. Khi có tiền, các con có thể chọn chơi với người giàu hay người nghèo. Khi có trí tuệ, các con có thể đàm đạo với giáo sư hay nông dân đều ung dung cả. Khi chơi giỏi, đi với nhóm nào các con cũng được nể trọng và chào đón. Vậy thôi.

Nếu các em muốn trở thành nhà Toán học trong tương lai, quá tốt. Chỉ cần nhớ rằng đó không phải là ràng buộc. Năm nay Mỹ có một cậu đạt huy chương vàng quốc tế lần thứ 4! Trước đó cũng có một cậu như vậy, Reid Barton, nhưng giờ đã bỏ Toán sau khi làm tiến sĩ. Kỷ lục là

Canada cũng có một cậu, thi từ năm lớp 7, được 5 vàng và 1 bạc (!), nhưng cũng không đi làm Toán. Nghe nói sau khi vào học Princeton cậu đã thất vọng vì mình cũng chỉ bình thường. Dễ hiểu thôi vì những sinh viên khác không đi thi quốc tế nhưng họ đã viết bài báo nghiên cứu từ năm 13, 14 tuổi.

Đấy là Mỹ, Canada. Còn bên Anh thì có cậu John Rickard, 3 lần huy chương vàng (2 lần tuyệt đối) và 3 lần được giải thưởng đặc biệt cho lời giải xuất sắc! Một kỷ lục cho đến nay vẫn chưa ai vượt qua. Nhưng khi vào học Toán thì cậu cũng thất vọng, vì sự xuất sắc và lối suy nghĩ đặc biệt của cậu không được mấy ai để ý và chăm chút. Cậu bỏ học và mất sớm vì bệnh ở tuổi 40.

Để trở thành nhà Toán học chuyên nghiệp, và có thể sống tốt, sống tự do bằng nghề, đòi hỏi tài năng, sự đam mê dài hạn, và khá nhiều may mắn nữa. Cũng như nhiều ngành nghề khác. Đó là một đặc ân hiếm hoi của cuộc đời. Vì thế, các em hãy cứ thoải mái tìm hướng đi cho mình. Biến thành công hiện nay thành công cụ để mở thật nhiều cánh cửa càng tốt, trải nghiệm thật nhiều thứ. Nhớ là nhiều khi phải "huấn luyện" cả gia đình mình cách sống với áp lực của người đời nữa.

Không có gì quý hơn độc lập tự do! Các em cần học cách bảo vệ sự tự do của mình, bắt đầu từ giây phút này.

* * *

Và bây giờ, mời bạn đọc đến với Epsilon 21!

MỤC LỤC

LỰC CORIOLIS VÀ LỊCH SỬ DÒNG CHẢY SÔNG HỒNG

Nguyễn Lê Anh

GIỚI THIỆU

Đây là số thứ 10 liên tục chúng tôi luôn đăng chuyên mục phám phá lịch sử thông qua tư duy lô-gích và phương pháp suy luận khoa học. Chúng tôi muốn giới thiệu với độc giả chúng ta có thể làm được những gì với tư duy toán học, thông qua những nghiên cứu miệt mài của nhà toán học Nguyễn Lê Anh. Trong số này, chúng tôi tiếp tục đăng những ghi chép của ông, những nổ lực không ngừng nghỉ cùng với những khám phá mới. Đây cũng là lời kêu gọi cộng đồng trong việc cùng chung tay xây dựng một tài liệu lịch sử cho dân tộc chúng ta - dân tộc Việt Nam.

Trong số này, chúng ta hãy cùng nhau xem lại lịch sử sông Hồng, cùng khám phá vì sao độ cong của dòng chảy sông đoạn chảy vào Hà Nội và chảy ra khỏi Hà Nội đều có dạng chảy theo cung đường tròn có bán kính như nhau. Vì sao chúng là các vòng tròn gần giống nhau?

* Tựa bài do Epsilon đặt.

1. Lực Coriolis và độ cong của dòng chảy sông Hồng

Dòng chảy của dòng sông phụ thuộc vào nhiều yếu tố. Có yếu tố là các rặng đá ngầm nhô ra, có yếu tố là do nguyên lý "bên lở bên bồi", có nguyên nhân là do lực mà chúng ta gọi là lực Coriolis.

Nguyên lý "bên lở bên bồi" là hàm ý dòng nước húc vào phía bờ bên này rồi lao về phía bờ bên kia. Đấy là do nguyên lý phản lực cửa định luật 3 Newton. Định luật 3 nói rằng "dòng nước tác động một lực vào bờ bên này, tức húc vào bờ, thì bờ sẽ tác động một lực vào dòng nước. Lực ấy bằng với lực dòng nước húc vào bờ nhưng ngược hướng. Phản lực đẩy dòng nước húc sang bờ phía bên kia". Phía bờ bị nước húc vào thì bị lở, phía bờ đối diện vận tốc dòng nước chậm hơn nên phù sa bồi. Cứ như thế mà tạo ra cái "bên lở bên bồi" nối tiếp nhau.

Phần hình dạng dòng sông do các rặng đá ngầm thì cần phải nghiên cứu cấu trúc địa chất. Khoảng 90 triệu năm về trước lục địa Ấn Độ đâm vào phía nam lục địa Á-Âu khiến cho vùng đất phía nam lục địa Á-Âu dâng cao thành cao nguyên Thanh Tạng. Phần giáp chỗ đâm nhau là dãy núi Himalya, nơi có đỉnh Everest cao nhất thế giới. Lục địa Ấn Độ chìm xuống bên dưới, tạo thành đồng bằng Ấn chạy từ Pakistan tới Myanmar. Đồng bằng Ấn là chân của cao nguyên

Thanh Tạng nơi có rất nhiều sông chảy xuống. Chính vì thế mà nơi đây có nhiều cây cối và các loại tôm cua ốc cá. Trong quá trình lục địa Ấn Độ đâm vào phía nam lục địa Á-Âu lục địa Ấn Độ hơi đâm hơi chếc về phía Đông Bắc và đẩy các vùng đất nơi này lên cao tạo ra các vòng cung cao nguyên Vân Nam. Cùng thời gian lục địa Ấn Độ cũng chèn ép lục địa Đông Nam Á khiến cho cho lục địa Đông Nam Á bị nhô lên thành các dãy núi Hoàng Liên Sơn kéo dài thành dãy Trường Sơn. Phần lục địa phía nam lục đại Á-Âu bị lục địa Đông Nam Á húc mà thành các vòng cung là các dãy núi thuộc vòng cung Đông Triều. Như thế sông Hồng và vết của lục địa Đông Nam Á chèn vào phía nam lục địa Á-Âu. Vùng đất hai bên sông Hồng thuộc vào hai lục địa khác nhau. Ở giữa, như núi Lương Sơn, Cúc Phương... là do macma bị đùn lên mà thành. Chúng là các đá bị nguội dần và bị biến dạng do lục địa chèn ép. Các loại đá này rất cứng và có thớ, nên có thể đập vỡ chúng ra thành các mảnh làm dao rất sắc. Đây là nguyên nhân vì sao vùng núi Lương Sơn cho tới Núi Đọ là thủ phủ của người tiền sử là tổ tiên của người Việt ngày nay. Như chúng ta đã nói Hòa Bình và Quảng Ninh là ở hai lục địa khác nhau. Phần ở giữa chúng là các dãy núi như dãy Tam Đảo, và vòng cung Chí Linh - Côn Sơn - Thủy Nguyên - Cát Bà - Quan Lạn - Trà Cổ. Phần cuối của các dãy núi có cấu trúc là các đảo như ở Vịnh Hạ Long, như ở vùng Tam Cốc Bích Động. Đây là vùng thuận lợi cho người tiền sử và người dân sinh sống.

Phần núi phía cuối của dãy Tam Đảo là Sóc Sơn. Phù sa bồi nhiều mà các đỉnh núi thấp nay chỉ còn cao như sàn nhà. Chúng tạo ra sự ngoằn nghèo của dòng chảy sông Cà Lồ.

Phần núi từ Ninh Sơn kéo ra tới Sài Sơn, chùa Thày là dãy núi thấp. Chính nó khiến cho dòng chảy của sông Hồng tạo ra sông Đáy. Phần phía gần Hát Môn là phần cuối của dãy núi ngầm Ninh Sơn, Sài Sơn, chùa Thày. Đó là nguyên nhân vì sao mà khu vực này không bị dòng nước sông Hồng thúc cho thành "bên lở bên bồi".

* * *

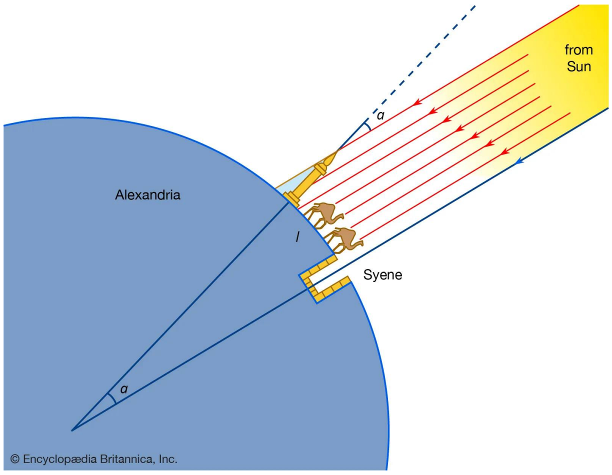
Trước khi đi tiếp chúng ta dừng lại vài giây để nói về lịch sử. Vào khoảng 140 nghìn năm về trước, mực nước biển xuống rất thấp. Đó là do khí hậu trở lạnh (theo chu kỳ Milenkovich). Nước đóng băng ở hai cực quá nhiều khiến cho mực nước biển hạ thấp hơn ngày nay khoảng 120m. Như thế lượng mưa càng ít hơn. Vùng Châu Phi hạn hán khô hanh xảy ra khiến cho các loài Hominin, tức tiền thân của giống người hiện nay, bỏ chạy ra các vùng khác nhau trên thế giới. Chúng là Neaderthan và Demisova. Vào khoảng 80 nghìn năm về trước mực nước biển cũng hạ thấp như vậy và đó là thời điểm người Homosapien rời khỏi châu Phi qua biển Đỏ. Dòng người Homosapien đã di cư từ Trung Á dọc theo đồng bằng Ấn Độ ven chân cao nguyên Thanh Tạng, và khoảng 30 nghìn năm về trước họ tới vùng Đông Dương. Họ nói bằng ngôn ngữ Munda, là tiền thân của ngôn ngữ tiếng Việt ngày nay. Phía dưới vùng cao nguyên Khorat của Thái Lan là muối. Các con sông từ cao nguyên Vân Nam chảy xuống vào mùa mưa hòa tan muối, về mùa khô các vũng nước muối ướp cá thành mắm. Nước mắm đã được hình thành như vậy từ khi chưa có con người sinh sống. Người tiền sử là tổ tiên trực tiếp của người Việt đã sinh sống ở vùng Đông Dương. Họ đã đun nước mặn ở vùng Khorat để lấy muối. Ngày nay công việc này vẫn còn duy trì. Do việc đun nước muối mà công nghệ nung đồ gốm đã hình thành từ rất sớm. Vùng Letpadaung là mỏ đồng lộ thiên. Như thế mà công nghệ luyện kim đồng đã xuất hiện nơi đây. Người ta tìm thấy ở di chỉ khảo Bản Chieng rỉ đồng và lò nung đồng từ hơn 4500 năm về trước. Nơi đây cũng tìm thấy hũ đất nung có chứa thóc hạt với niên đại 4500 năm. Khoảng 5000 năm cho tới 3500 năm về trước, do trục tự quay của Trái Đất bị lệch mà các luồng gió mùa trên khắp trái đất bị thay đổi. Gió mùa thay đổi khiến cho các vùng mưa thuận gió hòa bị hóa thành sa mạc khô cằn, và ngược lại. Vào thời gian ấy vùng sa mạc Sahara là rừng rậm nhiệt đới mưa nhiều. Vào sau 3500 năm vùng Babilon trở nên khô cằn, khiến cho người dân nơi đây phải di cư, bắt đầu sự phân chia tôn giáo Babilon thành Do Thái Giáo và Balamon giáo. Vào khoảng thế kỷ thứ 8 trước Công Nguyên Balamon giao chuyển hóa thành Bụt Giáo. Khoảng 5000 năm cho tới 3500 khu vực cao nguyên Khorat trở nên khô hạn, lượng mưa chưa tới 20cm một năm. Các nghiên cứu từ việc khoan măng đá ở các hang như hang Thạp Luông cũng khẳng định điều ấy. Cư dân (người tiền sử là tổ tiên trực tiếp của người Việt) ở vùng Khorat di cư về phía biển. Họ mang theo công nghệ đúc đồng tinh xảo. Phải sau Công Nguyên, người Thái ở cao nguyên Vân Nam mới di cư tới định cư ở vùng Thái Lan và Lào. Như thế việc nghiên cứu các giai đoạn tiền sử của người Việt cần phải được tiến hành ở toàn bộ khu vực Đông Dương.

* * *

Tuy rằng dòng nước chịu tác động của các dãy đá ngầm và quy luật "bên lở bên bồi", nhưng dòng nước chỉ có khi có lực tác động. Lực thứ nhất tạo ra vận tốc chảy là sự chênh nhau về cao độ của thượng nguồn con sông với hạ nguồn. Lực thứ hai là lực Coriolis. Lực Coriolis là hệ lụy của tốc độ dòng chảy khi nó chảy từ nơi cao hơn tới nơi thấp hơn. Như thế dòng chảy phụ thuộc vào độ cao giữa thượng nguồn và hạ nguồn. Độ cao này người ta tính dựa trên khái niệm là cao so với mực nước biển. Mực nước biển là một khái niệm. Trên thực tế nước biển dâng và hạ theo thời gian, chẳng những theo ngày mà còn theo mùa, theo năm... Hơn thế nữa, ở những vũng sâu trong lục địa thì không có nước biển. Khái niệm mực nước biển được hiểu là mực nước trung bình theo thời gian. Khái niệm mực nước biển ở các vùng sâu trong lục địa được hiểu là nếu chúng ta có một cái ống nhựa tròn dẫn nước nối một cái hồ ở sâu trong lục địa vào với biển thì mực nước hồ không thay đổi. Như thế mực nước biển ở các vùng khác nhau trên thế giới được hiểu theo nguyên tắc bình thông nhau. Vậy mực nước biển là một quả cầu nước tĩnh. Nó không giống mặt đất. Như các bạn biết, Trái Đất có dạng một hình gần như hình cầu, bán kính 6350km. Bán kính này được tính ra. Eratosthenes sinh vào năm 276 trước Công Nguyên. Vào năm 245 trước Công Nguyên, Eratosthenes là thủ thư của thư viện Alexandria. Khi ở trong thư viện ông nghe người ta kháo nhau *"ở Syene có thể nhìn thấy được cái kim dưới đáy giếng"*. Eratosthenes suy nghĩ và đi tới kết luận, sở dĩ người ta nhìn thấy cái kim dưới đáy giếng là do mặt trời chiếu thẳng góc tới bề mặt trái đất. Điều này thì không có ở Alexandria, tức mặt trời chiếu nhưng ở Alexandria các tia sáng không thẳng góc với mặt đất. Eratosthenes đã đặt ở trong sân thư viện Alexandria làm một cái chảo hình nửa mặt cầu và đo vết trên đáy chảo của cái que cắm vuông góc tới tâm của mặt cầu. Eratosthenes hình dung trái đất như một hình cầu rất lớn, từ phép đồng dạng mà ông ấy đã tính ra được bán kính trái đất là 6350km.

Eratosthenes cũng đã tính toán đường kính của Mặt trời, khoảng cách từ Trái Đất tới Mặt Trăng, tới Mặt Trời, góc lệch của trục tự quay trái đất, tính ra một năm có 365 ngày và cứ sau mỗi năm thứ tư thì sẽ có 366 ngày. ...

Trái đất tự quay nó và chuyển động quanh mặt trời. Trục tự quay và trục quay của nó quanh mặt trời lệch nhau một góc vào khoảng $23.4°$. Hướng quay đều cùng là ngược chiều kim đồng hồ. Như thế có một thời điểm vận tốc tương đối của chúng rất chậm. Vận tốc quay chậm thì thời gian mặt trời chiếu sáng ban ngày sẽ dài hơn. Ngày hôm ấy sẽ được coi là ngày nóng nhất của



cả năm. Người xưa gọi nó là Hạ Chí, tức ngày giữa mùa hè. Ở phía Bắc bán cầu thì ngày hạ chí là 22-6 (dương lịch). Ở vào giữa trưa ngày ấy tại vĩ tuyến 23°27's mặt trời chiếu thẳng góc.

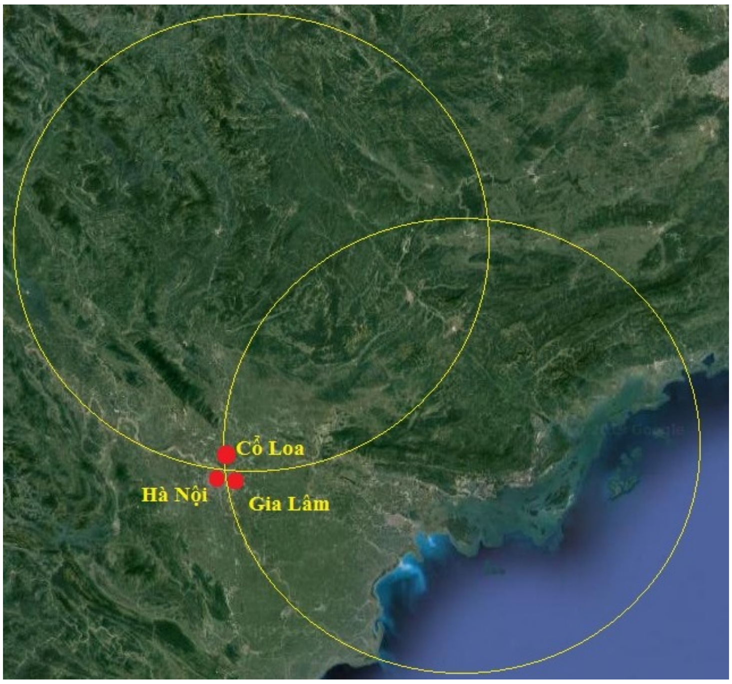
Trục tự quay của trái đất lệch với trục mà nó quay quanh mặt trời một góc khoảng 23.4°. Độ lệch này thường xuyên thay đổi với chu kỳ 41 nghìn năm. Khi góc lệch ít thì đường đi của mặt trời chủ yếu là ở vùng xích đạo. Vùng xích đạo rất nóng, nhưng ở các vùng đất ở hai phía cực Trái Đất trở nên lạnh giá. Băng đóng nhiều tới mức mực nước biển hạ thấp. Thảm thực vật thay đổi. Các loài động thực vật cũng chịu chung số phận. Khí hậu trên trái đất phụ thuộc không chỉ vào khu vực được mặt trời chiếu, tức độ lệch của trục tự quay, mà còn phụ thuộc vào việc quỹ đạo quay của trái đất bị các hành tinh khác kéo ra xa hay đẩy vào gần mặt trời. Các chu kỳ ấy được Milenkovich tìm ra, và chúng có thể tính ra được từ cơ học Newton. Người ta đã khoan băng để tìm hiểu tình hình thời tiết của quá khứ. Ở một số vùng cực Bắc, lượng tuyết rơi khá đều. Cứ mỗi năm vào mùa hè thì tuyết hơi tan ra thành một lớp băng mỏng. Các lớp tuyết và băng xen kẽ nhau, hết năm này qua năm khác. Dưới sức nặng các lớp này bị nén lại. Lớp băng thì có màu trong do khí đã bị thoát ra khi tuyết chảy, còn các lớp tuyết thì có màu hơi đục vì các bọt khí vẫn bị giữ lại ở bên trong. Bằng việc đếm các lớp "đục, trong"người ta tìm được niên đại của từng lớp mỏng. Người ta cũng biết được độ dày của các lớp và từ đó tính ra được nhiệt độ khi ấy. Người ta còn nghiên cứu được lượng khí oxy và carbonnic chứa trong các bọt khí để biết được tình trạng khí hậu. Người ta nghiên cứu lượng bụi mịn chứa trong các bọt khí để biết được các đợt phun trào núi lửa hay sự va chạm của các thiên thạch vào bề mặt trái đất... Từ việc khoan băng và tính toán vị trí của Trái Đất dực trên cơ học Newton người ta kiểm nghiệm được giả thuyết của Milenkovich, và ngoại suy ra được tình trạng khí hậu trên Trái Đất cho 400 triệu năm về trước cũng như về sau.

* * *

Như chúng ta lưu ý, lục địa Ấn Độ di chuyển từ vùng Mandagaska theo hướng Đông Bắc tới húc vào phía nam lục địa Á Âu. Nó húc vào và trượt nhẹ về phía Đông Bắc tạo ra vòng cung cao nguyên Vân Nam. Vào khoảng 30 triệu năm về trước Sông Hồng được hình thành ra từ cái hõm giữa hai lục địa, lục địa Đông Nam Á và phần phía nam lục địa châu Á. Như vậy phần phía Vân Nam cao hơn và dốc về phía Đông Nam. Chính vì vậy mà dòng chảy của con sông Hồng là theo hướng Tây Bắc - Đông Nam. Dòng chảy của sông trong khu vực núi là không thay đổi theo thời gian, tuy nhiên dòng chảy của sông Hồng trong khu vực phù sa bồi của mình thì nó sẽ thay đổi dòng. Như chúng ta đã nói quy luật đổi dòng là từ nguyên lý "bên lở bên bồi" và do lực Coriolis.

Vào năm 1835 Coriolis đã mô tả lực tác động vào dòng chảy, nước hoặc khí khi chúng chảy lên cao hay xuống thấp. Với nhiều người có thể cảm thấy khó hiểu về bản chất của lực này, tuy nhiên nó không khó hiểu đến như vậy. Chúng ta biết trái đất tự quay quanh nó. Như thế là tất cả mọi thứ gắn cứng vào với trái đất thì cũng quay theo. Một trái núi cao cũng quay theo. Càng ở trên cao thì vận tốc quay càng lớn. Cái không khí bao quanh núi thì không gắn chặt vào với trái đất nên nó không quay theo. Ở đây chúng ta nhớ lại là có định luật quán tính. Định luật quán tính bảo rằng "một vật sẽ giữ nguyên trạng thái đứng yên hay chuyển động thẳng đều nếu như không có lực tác dụng". Vậy thì cái khối khí cạnh núi với núi vẫn cùng chuyển động với cùng một vận tốc. Sự việc sẽ thay đổi nếu như khối không khí chuyển động lên cao. Nó chuyển động lên cao nhưng vận tốc quay thì vẫn như ở dưới thấp, vậy là nó chuyển động chậm hơn cái đỉnh núi! Vậy là có gió. Gió là do đỉnh núi chuyển động nhanh hơn. Chúng ta gọi lực gây ra chuyển động chậm hơn của khối khí là lực Coriolis. Như vậy lực Coriolis chỉ xuất hiện khi dòng chảy, khí hoặc nước, đi lên cao hoặc xuống thấp.

Do mật độ vật chất là đối xứng và gần như nhau ở tất cả mọi điểm trên trái đất nên quả cầu "mực nước biển" và hình dạng mặt đất là gần giống nhau. Dòng chảy của con sông Hồng vì thế mà là từ nơi cao (so với khoảng cách tới tâm trái đất) xuống nơi thấp. Như thế hình dáng dòng chảy của con sông Hồng ở vùng phù sa đồng Bằng Bắc Bộ chịu tác động của lực Coriolis. Nếu như chúng ta tính ra được lực này như nhau ở phần dòng chảy của sông Hồng tới Hà Nội và ra khỏi Hà Nội, thì hai vòng tròn dòng chảy có cùng bán kính như nhau. Thực tế tính toán cho thấy lực Coriolis tác động như nhau ở phần dòng chảy của sông Hồng tới Hà Nội và ra khỏi Hà Nội. Như thế thì bán kính hai vòng tròn dòng chảy của chúng là như nhau.



Lực Coriolis bằng với tích có hướng của vector trục quay trái đất và vector tốc độ của dòng chảy nhân với khối lượng nước. Phần vector dòng chảy hướng theo kinh tuyến không tạo ra lực Coriolis. Phần hướng theo vĩ tuyến sẽ tạo ra lực Coriolis nhưng là vuông góc với mặt đất nên không ảnh hưởng tới hành vi của dòng chảy. Chỉ có phần vector vận tốc chảy sâu xuống hay chảy lên khỏi mặt đất mới tạo ra lực Coriolis tác động đẩy cho nó lệch về bên trái hay bên phải. Do trái đất hơi dẹt mà khi chảy từ vĩ độ cao về vĩ độ thấp dòng nước bị chạy xa ra khỏi tâm trái đất.
Trong tính toán sau trái đất được coi là Ellipsoid tròn xoay, với 6356782.3142 là khoảng cách từ tâm trái đất tới cực Bắc và 6378137 lả khoảng cách từ tâm trái đất tới xích đạo. Các góc $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ là vĩ độ của dòng sông Hồng tại điểm Ngã Ba Việt Trì, Hồ Tây, và cửa biển Ba Lạt.

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{180}21.394544, \varphi_2 = \frac{\pi}{180}21.051343, \varphi_3 = \frac{\pi}{180}20.241443$$
$$R_1 = \sqrt{(\cos(\varphi_1) * 6378137)^2 + (\sin(\varphi_1) * 6356752.3142)^2}$$
$$R_2 = \sqrt{(\cos(\varphi_2) * 6378137)^2 + (\sin(\varphi_2) * 6356752.3142)^2}$$
$$R_3 = \sqrt{(\cos(\varphi_3) * 6378137)^2 + (\sin(\varphi_3) * 6356752.3142)^2}$$
$$S_{12} = \int_{\varphi_2}^{\varphi_1} \sqrt{(\partial_\varphi \cos[\varphi] * 6378137)^2 + (\partial_\varphi \sin[\varphi] * 6356752.3142)^2 d\varphi}$$
$$S_{23} = \int_{\varphi_3}^{\varphi_2} \sqrt{(\partial_\varphi \cos[\varphi] * 6378137)^2 + (\partial_\varphi \sin[\varphi] * 6356752.3142)^2 d\varphi}$$

Độ lệch cao độ trên 1km độ dài:

$$\frac{R_2 - R_1}{S_{12}} * 1000 = 2.26$$
$$\frac{R_3 - R_2}{S_{23}} * 1000 = 2.21$$

Như vậy trên mỗi km theo kinh độ từ ngã ba Việt Trì tới Hồ Tây Hà Nội dòng nước nghếch lên 2.26m, từ Hồ Tây Hà Nội ra tới biển ở của Ba Lạt nó nghếch lên 2.21m; lệch nhau 5cm. Độ chênh này đương nhiên làm cho lực Coriolis tác động vào dòng nước phần phía chảy vào Hà Nội mạnh hơn phần chảy ra, nhưng chỉ ở mức 3%.

Trong từng vùng nhỏ thì dòng chảy chịu thêm tác động phản lực húc từ bờ này sang bờ kia theo kiểu hình sin. Gặp khu vực đất đá cứng, tất nhiên dòng chảy là do các rãnh địa hình quyết định. Tuy nhiên đứng trên tổng thể cả đoạn sông dài thì dòng chảy tuân thủ theo lực Coriolis. Các phản lực chỉ như đẩy dòng nước dao động qua lại xung quanh đường trục chính do lực Coriolis vẽ ra. Xem ra độ rộng dòng sông Hồng khi chảy vào và khi chảy ra chênh nhau không nhiều, vì thế tốc độ dòng nước sông Hồng lệch nhau không nhiều. Vậy lực Coriolis phần dòng sông Hồng khi chảy vào và khi chảy ra phải gần bằng nhau chỉ lệch ở mức 3% như tính toán ở trên, tức độ cong của dòng sông phải gần như nhau. Phần chảy từ Hà Nội ra tới biển tại cửa Ba Lạt đủ dài để chúng ta vẽ vòng tròn hướng tâm ước lượng dáng điệu dòng chảy. Bán kính của nó khoảng 100km. Chúng ta sử dụng vòng tròn này áp cho phần dòng chảy của sông Hồng vào Hà Nội thì sẽ thấy đấy chính là dòng chảy của con sông Đuống. Vậy con sông Đuống chính là con sông Hồng khi mà phần chảy ra của sông Hồng còn là Biển. Điều này cho thấy gò đất Gia Lâm rất cổ, có thể nó có từ trước khi nước biển dâng lên, tức 6000 năm trước đây. Cả ba gò đất cổ Ba

Đình, Gia Lâm, Cổ Loa đều là các gò đất cao 16m, vậy chúng được hình thành do phù sa của con sông Hồng khi mức nước biển ở độ cao như vậy. Độ cao này là 130 nghìn năm về trước, và vì thế mà đấy chính là tuổi của các gò đất.

Dòng nước sông Đà là động năng chính quyết định hướng dòng chảy của sông Hồng. Dòng nước này chảy thẳng từ ngã ba Việt Trì - Sơn Tây qua đầm Vạc tới tới chân núi Tam Đảo chỗ hồ Đại Lải. Dòng nước bị uốn cong và chảy ra phía mũi Thánh Gióng. Trên bản đồ địa hình thềm lục địa chúng ta có thể thấy độ dốc thoai thoải từ vùng núi Tam Đảo tới mũi đền Thánh Gióng. Dòng nước ra khỏi mũi Thánh Gióng thì bị dòng Hải Lưu đẩy ngược trở lại, bị chia thành hai nhánh, một nhánh đi vào phía Thái Nguyên và một nhánh đi về phía Hà Nội. Quá trình này được tạo ra từ nhiều triệu năm về trước, thời gian tương ứng với các vỉa than đá được hình thành nơi đây.

Tại điểm rẽ nhánh dòng nước chảy chậm hơn và tạo ra các gò Cổ Loa, về sau do phù sa bồi mà điểm phân nhánh lùi ra xa tạo ra gò Gia Lâm. Nhánh chảy về phía Hà Nội bị dòng dòng Hải Lưu đẩy vòng lại thành xoáy và tạo ra gò Ba Đình. Nhánh chảy về phía Thái Nguyên bị phù sa của chính mình bồi và bị đẩy dần xuống phía dưới, về sau thành con sông Đuống. Do bị phù sa bồi con sông Hồng cũng rời xa khỏi phía núi Tam đảo và chuyển dần về vị trí con sông Hồng hiện nay. Do độ cong của toàn tuyến từ sông Hồng tới sông Đuống tương ứng chính xác gần như tuyệt đối với vòng tròn hướng tâm – hoàn toàn do lực Coriolis tạo ra – mà quá trình định hình phần sông Hồng chảy tới hồ Tây và sông Đuống là một quá trình chung. Quá trình này rất từ từ, và vì thế tuổi thọ của các gò đất bồi là rất cổ.

Dòng sông Lô có sức mạnh bằng khoảng 1/3 sông Đà; chế độ mưa giữa Tây Bắc và Đông Bắc cũng khác nhau, vì thế có lúc sức mạnh của dòng nước sông Lô áp đảo. Theo thời gian dòng sông Lô đẩy phù sa về phía con sông Đáy bồi đắp các vùng đất ven núi Hòa Bình, Hà Nam, Ninh Bình.

Trên bản đồ độ cao thềm đá lục địa chúng ta cũng thấy Hà Nội là một gò cao.

Lực Coriolis sẽ cho chúng ta biết được lịch sử hình thành các gò đất để khớp với các quyết định chọn Kinh Thành của các vương triều Việt Nam trong lịch sử.

2. Mô hình Gò Đống và Sông Hồng

Nhắc lại, khoảng 90 triệu năm về trước mảng lục địa Ấn Độ di chuyển từ vùng Madagascar nay tới đâm vào mảng lục địa Á-Âu. Sau cú đâm này mảng lục địa Ấn Độ bị chìm xuống dưới và đội vùng núi nơi có dãy Himalya với đỉnh Everest lên cao. Cú đâm hơi chếch về phía Đông Bắc nên vùng cao nguyên Vân Nam cũng bị đội lên thành các vòng cung. Trong quá trình húc này lục địa Ấn Độ chèn ép mảnh tiểu lục địa Đông Nam Á khiến nó bị đẩy vào phía Đông Nam lục địa Á-Âu, để lại vòng cung Đông Triều và dãy núi Hoàng Liên Sơn. Như vậy Bắc Việt Nam nằm ở trên cả hai mảnh lục địa, Đông Nam Á và Á-Âu. Phần phía bắc sông Hồng thuộc mảnh lục địa Á-Âu, phần phía nam sông Hồng thuộc mảnh lục địa Đông Nam Á. Các dãy núi thuộc hệ thống dãy Hoàng Liên Sơn ở phía nam sông Hồng có hướng Tây Bắc - Đông Nam kéo dài theo dãy Trường Sơn. Các dãy núi núi ở phía bắc sông Hồng có dạng vòng cung. Nó được gọi là vòng cung Đông Triều với tâm vòng cung ở vào khoảng Lào Cai. Đỉnh Yên Tử là một địa danh trong vòng cung Đông Triều. Giữa các vòng cung là đồng bằng thấp và có sông suối. Vòng cung ngoài cùng là "vành đai đảo" từ Trà Cổ, tới Vĩnh Thực, tới Cái Chiên, tới Vạn Mực, Quan Lạn... Vòng cung này đi vòng vào Cát Bà, Quảng Yên, Thủy Nguyên, Kinh Môn, Chí Linh.

Như vậy phần tiếp giáp giữa mảnh lục địa Đông Nam Á với phần phía đông nam lục địa Á-Âu tạo thành một cái khe sâu. Cái khe này được tạo ra là do rìa lục địa Đông Nam Á và rìa đông nam lục địa Á-Âu bị nhấn chìm xuống. Do một lượng lớn đất bị nhấn chìm xuống mà dung nham từ dưới lòng đất trồi lên tạo thành các núi từ Lương Sơn, qua Cúc Phương, tới núi Đọ.

* * *

Chúng ta mô tả quá trình địa chất hình thành Bắc Bộ của Việt Nam như vậy để hiểu cái khe rất sâu đã tạo ra dòng chảy con sông Hồng từ hơn 30 triệu năm về trước. Cái khe này rất sâu và rất rộng. Theo thời gian khe đã bị phù sa đã bồi lấp dần mà thành đồng bằng Bắc Bộ của chúng ta ngày nay. Lịch sử hình thành đồng bằng Bắc Bộ liên quan tới cư dân tiền sử là tổ tiên trực tiếp của dân tộc Việt Nam, như mô tả dưới đây, kéo dài tầm khoảng 20 nghìn năm. Chúng ta nói tới sự kiện nước biển dâng và phù sa bồi. Trên thực thế quá trình hình thành đồng bằng Bắc Bộ kéo dài 30 triệu năm và có rất nhiều lần mực nước biển dâng cao rồi lại rút đi. Phù sa đã bồi rồi lại bị nước mưa bào mòn chảy vào biển. Các dòng sông chảy ở vùng núi đá rất ổn định. Lực của dòng nước sông Đà rất lớn, chính vì thế mà hướng chảy của sông Hồng là do sông Đà quyết định. Dòng chảy này đẩy phù sa về phía Quảng Ninh ra tới Quảng Yên. Ở đây dòng chảy mang nhiều phù sa bị dòng Hải Lưu đẩy ngược trở lại tạo gò đất Hải Dương. Gò lớn dần, phần biển bị hẹp lại mà thành con sông Đuống. Như phần đất ở phía hai bờ con sông Đuống là rất cổ.

Theo mô hình Gò Đống, khoảng 20 nghìn năm về trước do khí hậu lạnh giá mà băng đóng nhiều ở hai cực. Do băng đóng nhiều mà mực nước biển hạ thấp hơn hiện nay 120m. Nhiệt độ tăng dần trong suốt 14 nghìn năm sau đó, đã khiến cho băng ở hai cực tan chảy, mưa nhiều hơn, mực nước biển dâng cao dần. Khoảng 10 nghìn năm về trước bờ biển vẫn như hiện nay, vẫn có đồng bằng Bắc Bộ. Nước biển tiếp tục dâng, khoảng 7000 năm về trước bờ biển chạy sát chân dãy núi Ba Vì, chạy qua khu vực Việt Trì rồi chạy tới ven chân dãy núi Tam Đảo. Toàn bộ đồng bằng Bắc Bộ khi ấy là vịnh biển nông. Cư dân tiền sử lùi dần về phía chân núi cao. Mực nước biển giữ nguyên như vậy trong suốt thời gian 7000 năm qua. Trong suốt khoảng thời gian ấy các con sông đã mang phù sa bồi vịnh biển nông thành đồng bằng Bắc Bộ hiện nay, vùi lấp đồng bằng bắc bộ cũ ở dưới sâu vài chục mét. Thời gian đầu, khoảng 7000 năm về trước, khi bờ biển vào tới tận chân dãy núi Ba Vì, chạy qua khu vực Việt Trì rồi chạy tới ven chân dãy núi Tam Đảo, thì các con sông Đà, sông Thao, sông Lô chảy thẳng vào vịnh biển. Do dòng nước sông Đà chảy rất mạnh, nó đẩy phù sa của các con sông Thao và sông Lô về phía Tam Đảo, rồi sau đó ra biển ở Quảng Yên. Tại đây dòng nước phù sa gặp dòng Hải Lưu chảy từ phía Bắc xuống. Dòng Hải Lưu đẩy dòng phù sa chảy xoáy ngược lại vào vịnh biển nông Bắc Bộ mà tạo thành các gò đống có nước chảy quanh. Rất nhiều gò đống đã được tạo ra như vậy. Cư dân tiền sử di cư dần ra các gò đống. Họ là người Kinh. Do phù sa bồi mà các gò lớn dần lên, khiến cho vùng nước giữa các gò hẹp lại mà thành các con sông. Ngôi nhà đầu tiên được xây tại nơi cao nhất gò. Đấy chính là đình làng bây giờ. Phần cuối gò là nghĩa địa chôn người chết. Giữa khu vực nghĩa địa với đình làng là ngôi nhà làm lễ tiễn biệt. Những người truyền bá Phật Giáo đã trú ở nơi ấy và chuyển chúng thành chùa. Vector nối từ đình làng tới chùa là chỉ hướng dòng chảy của dòng nước xưa.

Với mô hình như vậy, sông Hồng xưa không có mà chỉ có vịnh biển nông. Phù sa đã bồi hai bờ vịnh, bờ phía Tam Đảo và bờ phía Ba Vì, mà khiến cho vịnh hẹp lại thành sông. Cửa sông dịch chuyển với vận tốc 45km, và sau khoảng 6000 năm nó đã đã tạo ra dòng sông Hồng uốn lượn với độ dài 250km tính từ Việt Trì Phú Thọ ra tới của Ba Lạt. Chúng ta còn phải xác định vận tốc bồi của phù sa kiến cho hai mép vịnh, mép Tam Đảo và mép Ba Vì khép lại với nhau.

* * *

Trong bài báo ra tháng 4 năm 2020 nghiên cứu về mô hình phát tán Arsenic vào nước ngầm: "The controlling of paleo-riverbed migration on Arsenic mobilization in groundwater in the Red River Delta, Vietnam" của Phạm Quý Nhân và cộng sự có nghiên cứu địa tầng khu vực gần Hát Môn.

Đây là nghiên cứu để xác định hiện trạng ngộ độc Axen trong nước ngầm. Nhóm các tác giả thực hiện cùng lúc đo điện trở theo tuyến để xác định địa tầng có cùng điện trở, khoan thăm dò phân tích mẫu để hiệu chỉnh độ sâu từng lớp, và tính tuổi của từng lớp. Tuổi của từng lớp được đo theo phương pháp đo tỷ lệ cường độ phát xạ tia gamma của các đồng vị phóng xạ có trong khoáng vật (potassium (40K), thorium (232Th), uranium (238U)). Số lượng hố khoan thăm dò và lưới đo điện đủ dày đặc để phát hiện tình trạng lòng sông Hồng.

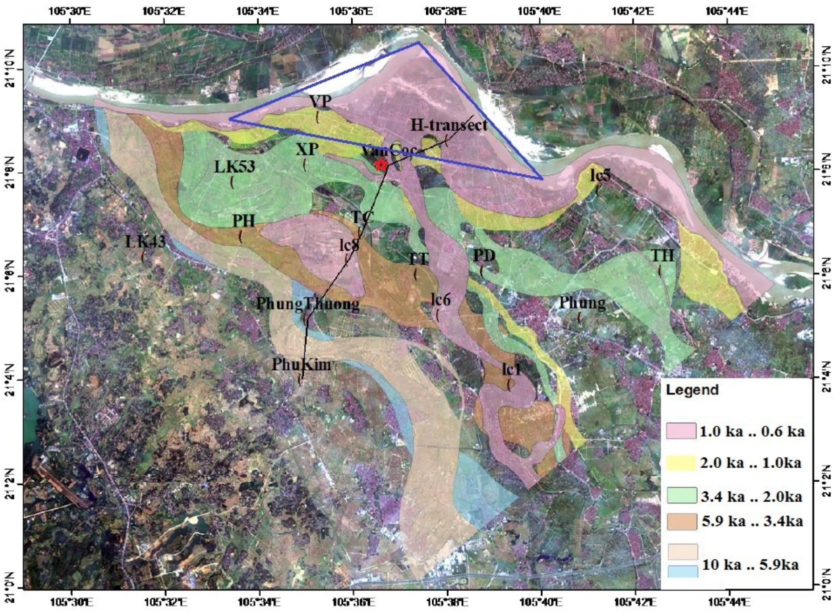
Do các quan niệm cũ mà các tác giả đã vô tình cho rằng lòng sông Hồng là một thực thể dịch chuyển dần từ phía Nam lên phía Bắc. Chúng ta thì hiểu đó chỉ là việc phù sa bồi khiến cho vịnh biển hẹp dần lại.

Với sự diễn giải của nhóm các tác giả thì lòng sông Hồng từ 3000 năm cho tới 2000 năm trước đây chảy ở phía bên Vĩnh Phúc đổ sang Phú Thượng ở phía nam Hát Môn (điểm khoan Vân Cốc).

Việc xác định dòng chảy của con sông Hồng là vô nghĩa, bởi nó luôn chảy theo khe nứt giữa mảnh lục địa Đông Nam Á với phần phía đông nam lục địa Á-Âu. Phần dòng nước mặt ở bên trên có thể hơi biến động ở dạng "bên lở bên bồi" tuy nhiên vẫn chỉ chảy trong vùng phù sa của nó. Dòng nước chảy trong vùng phù sa thì dễ thay đổi hình dạng, và hình dạng ổn định của phần nước bề mặt bên trên được xác định chủ yếu bởi các dãy núi ngầm ở bên dưới. Cũng giống như phần "vành đai đảo" của vòng cung Đông Triều, phần núi Hoàng Liên Sơn cũng có vành đai. Vành đai này tạo ra dòng chảy cho con sông Đáy, nó chạy dọc từ núi Chùa Thày, qua núi chùa Cao Sơn Đồng Lư, núi chùa Linh Thông ...

Trên bản đồ khoan được mô tả trong bài báo "The controlling of paleo-riverbed migration on Arsenic mobilization in groundwater in the Red River Delta, Vietnam" của Phạm Quý Nhân và cộng sự, chúng ta có thể nhận thấy gò đất cổ kéo dài từ Tân Hợi tới lỗ khoan lc5. Nó chính là phần tiếp theo của vành đai đá ngầm tạo ra dòng chảy của con sông Đáy. Do có dãy núi đá ngầm mà dòng chảy của sông Hồng bị uốn cong ở vùng Vân Cốc và uốn cong ở Tân Hợi.

* * *



Bản đồ vị trí các lỗ khoan khảo sát của Phạm Quý Nhân và cộng sự. Nguồn: "The controlling of paleo-riverbed migration on Arsenic mobilization in groundwater in the Red River Delta, Vietnam".

Với mô hình gò đống của chúng ta thì lòng sông Hồng không có chuyện dịch chuyển. Sông Hồng nay là vịnh biển xưa đã bị thu hẹp dần. Vào khoảng 6000 năm về trước eo biển vẫn còn rộng tới 20km về mỗi bên, ở giữa có các gò nổi. Di chỉ Đồng Đậu có tuổi 3500 năm, nằm ở vị trí cách dãy Tam Đảo khoảng gần 20km. So với 6000 năm thì bờ phía Tam Đảo đã bồi được khoảng 2.5 nghìn năm. Như thế cứ 1000 năm phù sa bồi thêm được khoảng 8km, tính từ chân núi Tam Đảo và Ba Vì. Các trận đánh xưa của Bà Trưng với Mã Viện là diễn ra trong toàn bộ khu vực Bình Lệ Nguyên dọc theo con sông Cà Lồ (sông khi ấy rộng tầm 500m). Quân của Bà Trưng đóng ở vùng Hát Môn.

CHỈ LÀ CHUYỆN NHÂN LŨY THỪA

Nguyễn Ái Việt

Nhân lũy thừa, chỉ đơn giản là $a^x a^y = a^{(x+y)}$, với các số thực x, y, học sinh phổ thông nào cũng biết. Nhưng để chứng minh nó, chắc các học sinh giỏi cũng ngắc ngứ. Có lẽ đó là phần xấu xí nhất trong chương trình toán phổ thông. Nhưng có lẽ nhờ thế, tôi có được một số trong những bài báo thú vị nhất của mình.

Trước tiên, có lẽ phải cảm ơn thầy giáo dạy toán của tôi là thầy Đặng Quan Viễn, là người đã cố gắng chứng minh công thức đó cho chúng tôi bằng gần hết thời lượng của một học kỳ dạy đại số. Tất nhiên, chứng minh của thầy hoàn toàn thất bại trong khuôn khổ kiến thức của chương trình trung học thời bấy giờ. Nhưng việc thấy được điểm khập khiễng này cũng đã là một điều vĩ đại vào lúc bấy giờ, và làm tôi kính phục thầy hơn rất nhiều nhà chuyên nghiên cứu Toán đương đại.

Có lẽ ít ai để ý tới công thức nhân lũy thừa nói trên, bởi vì công thức là hiển nhiên với các số mũ nguyên, thậm chí với các số mũ hữu tỷ. Nhưng chứng minh, dựa trên định nghĩa về lũy thừa với một số mũ thực là giới hạn của các lũy thừa với số mũ hữu tỷ, khi giới hạn chỉ mới được giới thiệu qua một số chuỗi hội tụ, có lẽ là một việc bất khả thi. Trong wikipedia[1], cũng chỉ buông một câu rất "phản toán" là "vì các số vô tỷ là giới hạn của các số hữu tỷ" nên lũy thừa với số mũ thực là giới hạn của lũy thừa của số mũ hữu tỷ. Nếu học sinh cũng áp dụng lý luận lười biếng đó đó cho số mũ phức thì sẽ có những rắc rối.

Có những người may mắn sẽ thoát nạn, có những người đã phải trả giá bằng cả một sự nghiệp khoa cử. Tôi biết có một học sinh giỏi, rất sáng giá và có chí lớn, sau khi bị đánh trượt môn đại số chỉ vì không làm được khai căn bậc n của 1 trên trường số phức, nản chí học hành và trở thành một học sinh làng nhàng, có lẽ chỉ bị ảnh hưởng quá nặng bởi những lý luận qua loa như trên. Tai nạn đó rõ ràng mang tính ngẫu nhiên, bởi nếu hôm đó mụ thần may mắn không bắt anh gắp trúng đề thi đó, hôm nay biết đâu đã có bao nhiêu thế hệ học sinh được nghe một thêm một giáo sư khả kính rao giảng những kiến thức cao siêu.

Cũng may, học sinh bị giáo trình lấp liếm, chứ nếu đặt câu hỏi "tại sao giới hạn đó lại tồn tại", "có chắc là luôn luôn tồn tại không",... các thầy khéo mà đau đầu. Cũng may, chương trình của ta chỉ chú trọng thợ làm toán, không chú ý đến người suy nghĩ, đặc biệt là đa số sẽ làm ở ngành khác, không mang huy chương về cho nước nhà, ít suy nghĩ một chút cũng tốt. Chắc chắn để trả lời các câu hỏi đó cho thỏa đáng các thầy sẽ phải nói về mở rộng số nguyên sang số hữu tỷ, tính trù mật khắp nơi của các số hữu tỷ, tính sắp được của trường số thực, tính liên tục của hàm lũy thừa.

[1] Tính theo thời điểm tháng 3/2014. Chú thích này của Epsilon.

Quá nhức đầu, thách đố chẳng khác gì trả lời câu hỏi cho học sinh tiểu học "em bé sinh từ đâu ra". Tôi cho rằng, đối với cả hai vấn đề toán và sinh vật trên, đều phải theo nguyên tắc, không dạy thì thôi, dạy là phải đầy đủ. Không dạy những thứ nhảm nhí như em bé đẻ ra từ nách. Như vậy, công thức trên có thể dạy dưới dạng quy tắc ở các lớp dưới, không cần dạy sau phần giới hạn chuỗi. Hoặc nếu đã dạy thì cần dạy đến nơi đến chốn việc mở rộng số, khái niệm giới hạn, liên tục,... trên ví dụ là hàm lũy thừa.

Hàm lũy thừa có thể mở rộng với các số mũ là các ma trận hoặc các toán tử. Vật lý cổ điển chuyển sang vật lý lượng tử có thể hiểu một cách đơn giản là thay thế các số bằng các ma trận hoặc toán tử để mô tả các đại lượng vật lý. Chẳng hạn với hàm lũy thừa với cơ số e, với các số mũ là các ma trận thì công thức nhân lũy thừa $e^A e^B = e^{A+B}$, chỉ đúng khi các ma trận A, B giao hoán $AB = BA$.

Công thức đúng trong trường hợp tổng quát hơn, khi A và B không chắc là giao hoán, là đồng nhất thức Cambell-Haussdorf:

$$e^A e^B = e^{A+B+1/2[A,B]}$$

trong đó $[A, B] = AB - BA$. Và thực ra, đồng nhất thức Cambell-Haussdorf cũng chỉ đúng nếu $[A, [A, B]] = 0 = [B, [A, B]]$ hoặc hạn chế áp dụng trên một tập hợp các ma trận có tính kết hợp, như quaternion. Với các số không kết hợp như octonion (số Calley), công thức Cambell-Haussdorf cần tiếp tục bổ sung thêm các phần tử mới, và biểu thức ở vế phải của đồng nhất thức Cambell-Haussdorf có thể kéo dài vô tận. Và các cấu trúc mới sau tính kết hợp có thể sẽ được hiểu mỗi khi ta muốn chấm dứt vế phải của đồng nhất thức này ở một bậc nào đó của các ma trận A, B. Nói một cách khác, công thức nhân lũy thừa chỉ là xấp xỉ tuyến tính của đồng nhất thức Cambell-Haussdorf suy rộng.

Nhân đây cũng cần nói thêm về các nguyên tắc của việc tổng quát hóa. Tổng quát hóa là một phương pháp luận, không phải chỉ có ý nghĩa với các nhà toán học. Trong cuộc sống thường ngày, tổng quát hóa cho phép áp dụng các kiến thức đã biết để giải quyết vấn đề trong các lĩnh vực mới lạ. Nhưng cần phải có thao tác nhất định chứ không thể luôn luôn "ăn may" như trong công thức nhân lũy thừa của số mũ thực.

Tổng quát hóa, theo lối máy móc, có thể có sự góp phần của các thày dạy Toán đặc biệt ở việc nhân chuỗi lũy thừa, đang trở thành phương pháp luận phổ biến như chụp mũ, chủ nghĩa lý lịch, nâng quan điểm để những tên hoạt đầu chính trị trục lợi. Chúng ta đã quá dị ứng với những lý luận "anh nói thế chứng tỏ là anh...", "gia đình anh như thế chứng tỏ anh cũng như vậy...", "anh làm việc nọ chứng tỏ quan điểm anh thế kia".... Suy nghĩ cho cùng về mặt logic, những lý luận đó cũng chẳng kém việc dùng công thức nhân lũy thừa cho số mũ nguyên.

Có một nguyên tắc khác của tổng quát hóa là phải có một motivation. Có nhiều rất nhiều thầy tiêu phí cả đời vào việc tổng quát hóa vô bổ. Các thầy rất sẵn ý tưởng, luôn luôn đủ cung cấp cho hàng trăm học sinh, tổng quát hóa ABC sang XYZ. Nghe thì rất rắc rối, cao siêu nhưng chung qui rất kém sáng kiến, không hơn gì "trong giáo trình đã dạy nhân hai số có 2 chữ số, học trò tôi đã tổng quát hóa nhân hai số có $n < 5$, đề nghị anh tổng quát hóa cho $n < 7$, $n > 6$ là vấn đề hết sức vĩ đại to lớn mà nhân loại sẽ còn phải giải quyết".

Tôi nhận thức được, loại tổng quát hóa vô nguyên tắc sẽ đi đến những tri thức hiển nhiên qua định luật Hook. Định luật Hook phát biểu là độ giãn dx của một thanh vật chất đàn hồi tỷ lệ tuyến tính với lực kéo, khi lực kéo bé. Định luật Hook thứ hai cho thấy sự phụ thuộc bậc 2. Nếu tổng quát hóa đến cùng chẳng qua chỉ là khai triển Taylor của một hàm giải tích, và chẳng dùng được gì trong thực tế.

Khi có motivation, tổng quát hóa sẽ phải theo từng bước, để kiểm chứng lại motivation, đừng để bị lệch hướng vào các tổng quát hóa vô bổ hoặc để sự lười biếng của trí tuệ lẻn vào, như việc nhân lũy thừa số thực. Nếu suy nghĩ đúng hướng, một vấn đề như nhân lũy thừa có thể kết nối với những vấn đề rất thú vị của toán học hiện đại. Một nhà toán học có những công trình xuất sắc không phải suốt ngày nghĩ đến các chuyện quái gở, suy nghĩ kiểu quái vật, thao tác bất thường, dùng các công cụ quái khủng. Họ cũng suy nghĩ bắt đầu từ những ý tưởng bình dị, như bất cứ một vấn đề ứng dụng thực tế nào, chỉ có điều họ đi rất sâu, phân tích rất kỹ và có những motivation xuất sắc để khỏi trệch hướng.

Tôi muốn kể một kinh nghiệm cụ thể cũng chỉ liên quan đến việc nhân lũy thừa để minh họa điều đó. Các phép biến đổi liên tục thường được biểu diễn bằng các biểu diễn hàm mũ với cơ số e. Chẳng hạn phép tịnh tiến trong không gian Eulide n chiều với vector a có thể viết

$$f(x) \to f(x+a) = T(a)f(x) = e^{ia\frac{d}{dx}}f(x)$$

Thực ra chỉ là một khai triển Taylor và dùng mở rộng công thức chuỗi của hàm mũ cho toán tử đạo hàm d/dx. Biểu diễn phép tịnh tiến như vậy đảm bảo tính đồng phôi $T(a_1 + a_2) = T(a_1)T(a_2)$, do công thức nhân lũy thừa là đúng khi mở rộng cho toán tử đạo hàm. Lý do như chúng ta đã thấy từ đồng nhất thức Cambell-Haussdorf, là các đạo hàm là giao hoán với nhau. Khi chuyển sang các không gian cong Riemann, các đạo hàm được thay bằng các đạo hàm hiệp biến $D = d/dx + A(x)$ nhờ một đại lượng $A(x)$, mà các nhà toán học gọi là liên thông, các nhà vật lý gọi là thế. Các đạo hàm hiệp biến buộc phép tịnh tiến bám chặt trên mặt đa tạp, chứ không đi thẳng ra ngoài. Các đạo hàm này không giao hoán. Do đó, phép biểu diễn tịnh tiến $T(a) = e^{iaD}$ sẽ không còn cấu trúc đồng phôi như đã nói. Sử dụng đồng nhất thức Cambell-Haussdorf, ta sẽ có $T(a_1)T(a_2) = alpha(a_1, a_2, x, 2)T(a_1 + a_2)$. Đại lượng $alpha(a_1, a_2, x, 2)$, gọi là 2-cocycle là một khái niệm về đồng điều trong tôpô. Tương tự $T(a_1)T(a_2)...T(a_n) = alpha(a_1, a_2, ..., a_n, x, n)T(a_1 + a_2... + a_3)$ là các n-cocycle.

Các cocycle được chứng tỏ trong một công trình của tôi viết năm 1987 là các tích phân vòng quanh đa diện có các đỉnh là $x, a_1, a_2, .., a_n$ và có ý nghĩa toán học là các đặc trưng tô pô, và ý nghĩa vật lý là các đại lượng vật lý đo được. Chẳng hạn 2-cocycle liên quan đến một hiệu ứng thực nghiệm rất nổi tiếng là hiệu ứng Bohm-Arahonov, được công ty Hitachi đầu tư nhiều để quan sát thực nghiệm. 3 và 4-cocycle, liên quan đến các lớp đặc trưng Chern-Simons, Chern-Pontrijagin,... có thể quan sát thông qua các đối tượng vật lý như đơn cực từ, soliton, lỗ đen,...

Nói một cách khác, trong thực tế, có nhiều hoàn cảnh, biểu diễn tuyến tính không còn sử dụng được. Do tương tác vật lý, các cấu trúc toán học bị "biến dạng", tương tự công thức nhân lũy thừa bị biến dạng thành đồng nhất thức Cambell-Haussdorf theo nhiều bậc. Biến dạng hình học có thể đo bằng các cocycle, và sự tồn tại của cocycle ở các bậc, một cách bí ẩn nào đó lại liên quan đến các tính chất đại số như giao hoán, kết hợp,... Từ đó chúng ta có thể nghĩ tới các khái niệm toán học của biểu diễn biến dạng, từng bước một được phân loại bằng cocycle, và mỗi bước đánh dấu bằng sự tồn tại của các đối tượng vật lý có thể quan sát được.

Biểu diễn tuyến tính không phải là công cụ toán học duy nhất để các nhà vật lý nghiên cứu các nhóm biến đổi liên tục. Từ những năm 60-70 của thế kỷ trước, các nhà vật lý đã sử dụng khái niệm biểu diễn phi tuyến cho một nhóm đối xứng Lie bất kỳ trong vật lý. Biểu diễn này có thể mô tả các hệ thống vật lý bị vi phạm tự phát. Tôi đã sử dụng biểu diễn này để xây dựng thành công một mô hình cải tiến cho hạt nucleon vào năm 1989. Mô hình này cho kết quả phù hợp với thực nghiệm tốt hơn các kết quả do nhóm của Giáo sư Edward Witten tại Princeton, trên cơ sở của mô hình cũ.

Từ một công thức nhân lũy thừa đơn giản, mà một học sinh trung học cũng có thể hiểu dễ dàng, nếu phân tích thật kỹ vẫn có thể thấy cả một thế giới với các tri thức toán học, vật lý tiên tiến nhất. Đặc biệt, các cấu trúc toán học khác nhau được sắp xếp một cách có trật tự, và bằng một cách huyền bí nào đó, các sản phẩm của trò chơi tư duy, đều lần lượt xuất hiện trong tự nhiên dưới một dạng nào đó. Khi thực nghiệm tìm ra hạt W, hình như Salam có nói một câu gì đó tương tự như "không thể tin được đó là sự thực". Cho đến nay thì các cấu trúc toán học điên rồ, nhất cũng đều lần lượt xuất hiện trong tự nhiên. Vì sao có sự phù hợp như vậy giữa tổ chức vật chất trong vũ trụ với những ảo ảnh sinh ra nhờ các phản ứng sinh hóa trong não bộ của một động vật cao cấp. Đó vẫn là bí ẩn lớn nhất của cuộc đời tôi mặc dù vẫn còn nhiều điều phải lo toan.

LÝ THUYẾT ĐỘ PHỨC TẠP

Alexander Alexandrovich Razborov
Người dịch Trần Nam Dũng

GIỚI THIỆU

Các thuật toán khác nhau để giải quyết nhiều vấn đề khác nhau phổ biến cả trong khoa học và công nghệ và trong cuộc sống hàng ngày (mặc dù trong trường hợp cuối, chúng ngày càng thường xuyên bị "*che đậy*" và ít được người dùng bình thường nhìn thấy). Trong bài viết này, chúng ta sẽ nói về lĩnh vực chung nghiên cứu tính hiệu quả, hay nói khác đi, chất lượng của thuật toán bất kể loại và nguồn gốc của chúng.

Trước hết, cần phải thống nhất về lớp đối tượng đang nghiên cứu, tức là bản thân các thuật toán. Không có sự đồng thuận về vấn đề này. Bản thân từ "*thuật toán*" bắt nguồn từ tên của nhà khoa học Ba Tư vĩ đại al-Khorezmi, người vào thế kỷ thứ IX đã mô tả các quy tắc xử lý hệ thống số vị trí (thật kỳ lạ là từ "*đại số*" cũng xuất phát từ cùng một công trình đó). Sau đó, trong một thời gian dài, thuật toán được hiểu là nghệ thuật và quy tắc đếm, các thuật toán hoạt động trên số nguyên hoặc số hữu tỉ sẽ được gọi là *thuật toán số*.

Mức độ tổng quát tiếp theo là các thuật toán làm việc với dữ liệu rời rạc tùy ý: Đồ thị, mảng, văn bản, lịch trình,... Đây là *các thuật toán theo nghĩa toán học nghiêm ngặt của từ này*. Chúng được định nghĩa và lần đầu tiên được nghiên cứu trong các công trình của các nhà logic toán học vĩ đại của thế kỷ trước, chẳng hạn như K. Gödel, A. A. Markov, P.S. Novikov, A.Turing, A.Church, những người đã tạo ra cơ sở chặt chẽ của *lý thuyết tính được*, và đây là chính xác là lớp thuật toán được sử dụng trong các thiết bị hiện đại.

Cuối cùng, thuật toán có thể được hiểu theo nghĩa rộng nhất, là một tập hợp các quy tắc cụ thể và được xác định đầy đủ, mà việc thực hiện các quy tắc đó sẽ cho phép bạn đạt được mục tiêu trong một thời gian hữu hạn.

Quan điểm chính của lý thuyết về độ phức tạp của các thuật toán, nói một cách đại khái, là không phải tất cả các thuật toán đều bình đẳng theo quan điểm về tính phù hợp thực tế của chúng, và những khác biệt này có thể không chỉ liên quan đến các thuật toán đứng ở các nấc thang khác nhau được nêu trong đoạn trước, nhưng ngay cả với các thuật toán của cùng một bài toán. Hơn nữa, "*chất lượng*" của các thuật toán có thể được *đo lường* bằng một "*hàm phức tạp*", mà trên thực tế sẽ dẫn đến một lý thuyết toán học chặt chẽ.

Chúng ta sẽ thử minh họa các ý tưởng chính của nó bằng một ví dụ mô hình đơn giản. Xét bài toán tìm ước chung lớn nhất (a, b) của các số tự nhiên a và b, nghĩa là số d lớn nhất có thể sao cho cả hai đều chia hết cho d. Bài toán phổ thông này sự tổng quát hóa của nó (ví dụ, đối với trường hợp đa thức) nảy sinh ở bất cứ nơi nào lý thuyết số được áp dụng, chủ yếu trong lý thuyết mật mã. Làm thế nào để giải quyết nó? Có thể có một số cách tiếp cận.

Thuật toán đầu tiên (khá thô sơ). Chúng ta chọn từ các số từ a đến 1 theo thứ tự giảm dần (tức là bắt đầu bằng a) cho đến khi chúng ta gặp số mong muốn.

Thuật toán thứ hai (sau một chút suy nghĩ). Tốt hơn hãy chia tuần tự a cho $2, 3, 4\dots$ và thử $a/2, a/3, a/4, \dots$ (ở đây được hiểu rằng nếu a/k không nguyên thì ta bỏ qua, còn với nó nguyên thì ta thử chia b cho nó). Nếu chúng ta may mắn (và điều này chắc chắn sẽ xảy ra nếu $(a, b) \geqslant \sqrt{a}$), thì tốt, còn nếu không, thì ta chuyển sang phương pháp đầu tiên, nhưng lần này bắt đầu với $\sqrt{a}$, chứ không phải với a.

Thuật toán thứ ba (cho những độc giả có căn bản tốt về toán). Khai triển a và b ra thừa số nguyên tố: $a = p_1^{d_1} p_1^{d_2} \cdots p_k^{d_k}$ và $b = p_1^{e_1} p_1^{e_2} \cdots p_k^{e_k}$ (một số số mũ có thể bằng 0). Khi đó ước chung lớn nhất có thể tính được theo công thức đơn giản

$$d = p_1^{\min(d_1,e_1)} \cdot p_1^{\min(d_2,e_2)} \cdot p_k^{\min(d_k,e_k)}.$$

Để so sánh các cách tiếp cận khác nhau một cách hợp lý, rõ ràng là cần một "*thước đo*" chung. Bạn có thể thử sử dụng số lần thử làm thước đo, sau đó bạn có thể thấy ngay rằng trong trường hợp xấu nhất, thuật toán đầu tiên sẽ cần khoảng a lần thử, trong khi thuật toán thứ hai – cần khoảng $2\sqrt{a}$ lần thử, và đó là một tiến bộ đáng kể. Nhưng làm thế nào để bạn so sánh chúng với thuật toán thứ ba, thuật toán sử dụng những ý tưởng hoàn toàn khác (và nâng cao hơn)?

Các tình huống trong đó các thuật toán tốt đi đến mục tiêu theo đường vòng là rất phổ biến, trên thực tế, lý thuyết thuật toán tồn tại là để phân tích chúng. Do đó, rõ ràng là thước đo mong muốn phải phổ biến và phù hợp với bất kỳ thuật toán nào, không phụ thuộc vào cách chọn hướng giải quyết bài toán. Hóa ra là ngay cả khi chúng ta chỉ quan tâm đến các vấn đề lý thuyết - số như ví dụ mô hình của chúng tôi, rất khó để đưa ra một định nghĩa khả thi về độ phức tạp của chúng hoàn toàn về mặt số. Có quá nhiều ý tưởng khác nhau và toán học đẹp mắt liên quan đến các thuật toán đã có. Nhiều thuật toán thậm chí không phải là thuật toán số theo nghĩa của chúng tôi, tức là các thuật toán đó sử dụng các đối tượng có bản chất khác.

Vì lý do này, một thước đo phổ quát chỉ có thể được đưa ra ở cấp độ tổng quát trong khuôn khổ của lý thuyết tính toán cổ điển, và một cách khoa học nó được gọi là *số bước của máy Turing* - một thiết bị tính toán trừu tượng do nhà toán học vĩ đại người Anh A.Turing đề xuất năm 1936. Ở mức độ trực quan, đây là số bước cơ bản (tức là không thể phân chia được nữa) cần phải thực hiện để đạt được mục tiêu. Trong trường hợp của máy Turing cổ điển, các hoạt động này khá nguyên thủy: Di chuyển dọc theo băng tính toán một vị trí sang trái hoặc phải, đọc hoặc ghi đè ký hiệu được quan sát,... Nhưng một độc giả am hiểu một chút về lập trình có thể giả sử rằng chúng ta đang đếm số lần thực thi các lệnh có trong chương trình trong toàn bộ thời gian hoạt động của nó. Đó là *số lần thực thi*, không phải số lượng lệnh – nếu đếm số lượng lệnh thì đó sẽ là *độ phức tạp Kolmogorov*, mà chúng ta không xem xét ở đây.

Bây giờ chúng ta hãy nói một chút về vai trò của ngẫu nhiên. Nếu chúng ta áp dụng các thuật toán của mình cho $a = 54284452$, $b = 67855565$, nó sẽ ảnh hưởng đến hoạt động của các thuật toán này theo những cách khác nhau. Thuật toán đầu tiên và thứ ba sẽ không chú ý đến đặc thù của a và b và sẽ hoạt động với hiệu suất thông thường của chúng, còn thuật toán thứ hai sẽ đưa ra câu trả lời chính xác $(a, b) = 13571113$ sau lần thử thứ ba. Điều này có nghĩa là thuật toán này chắc chắn tốt hơn?

Không thể đưa ra một câu trả lời chính xác về mặt toán học cho câu hỏi này. Tất cả phụ thuộc vào tần suất các ví dụ đặc biệt tốt hoặc đặc biệt xấu được tìm thấy trong ứng dụng cụ thể mà chúng ta quan tâm vào lúc này. Một ví dụ trong sách giáo khoa là phương pháp simplex được sử dụng (theo như tác giả biết) trong tất cả các gói quy hoạch tuyến tính hiện đại để giải các bài toán tối ưu hóa. Ở đây tình huống hoàn toàn ngược lại (so với ví dụ được đưa ra cho thuật toán thứ hai): Các ví dụ rất xấu cho phương pháp simplex đã được biết đến, nhưng để xây dựng chúng bạn cần rất cố gắng, và trong thực tế, chẳng ai chú ý đến chúng.

Tất nhiên, cách tiếp cận toán học nhất để phân tích các thuật toán là không dựa vào sự may rủi và đơn giản là bỏ qua sự hiện diện của các ví dụ đặc biệt tốt. Nó được gọi là *lý thuyết độ phức tạp trường hợp xấu nhất* (hoặc đôi khi *độ phức tạp được đảm bảo*). Với tất cả những điều đã trao đổi ở trên, cách tiếp cận này hóa ra là một mô hình hoàn toàn định tính và đầy đủ trong hầu hết các tình huống thú vị - các lỗ hổng như phương pháp simplex (nghĩa là khi độ phức tạp trong trường hợp xấu nhất được xác định bởi các ví dụ cực kỳ xấu) có thể đếm được trên đầu ngón tay. Yêu cầu nhiều hơn từ một mô hình toán học đơn giản là không hợp lý.

Để hiểu cách tiếp cận này là gì, hãy lưu ý rằng thông tin quan trọng và phổ biến nhất về một số là số ký tự trong cách viết của nó (n). Ví dụ, trong ví dụ của chúng ta $n = 8$, nếu viết trong hệ thập phân và $n \approx 25$ nếu là số nhị phân - sự khác biệt là hơn ba lần một chút. Mục tiêu cuối cùng của các nhà phát triển thuật toán là xây dựng một thuật toán được đảm bảo để giải quyết bài toán trong $f(n)$ bước cơ bản, bất kể số $n-$bit nào được cung cấp cho anh ta (trong đó $f(n)$ là một hàm số nào đó, mong muốn là tăng chậm).

Chúng ta nhấn mạnh rằng - đó là số ký tự trong cách viết của số, chứ không phải chính số đó, để cảm nhận sự khác biệt, chỉ cần thấy rằng con số biểu thị số nguyên tử trong phần nhìn thấy được của Vũ trụ có thể viết gọn trên một dòng, dù là bằng một nét chữ nhỏ.

Chúng ta hãy phân tích một lần nữa từ quan điểm thuật toán cho ví dụ mô hình của chúng ta. Trong trường hợp xấu nhất, thuật toán đầu tiên sẽ cần khoảng $f(n) \approx 10^n$ các phép toán cơ bản. Đây là tích số của số lần thử với số phép toán cần thiết cho mỗi phép toán, nhưng vì để làm điều này chỉ cần các phép toán số học đơn giản (tuy nhiên, như rút ra từ bài báo "*Số học nhanh*", ngay cả đối với các phép toán số học này, vấn đề cũng không đơn giản như ta tưởng), thừa số thứ hai là một đa thức nhỏ của n, và so với các hàm mũ, nó hoàn toàn có thể được bỏ qua. Dấu gần đúng được dùng chính là vì điều này. Thuật toán thứ hai trong trường hợp xấu nhất (một bài tập hay cho bạn đọc – tìm hiểu xem trường hợp nào là trường hợp xấu nhất) sẽ cần đến $f(n) \approx 10^{n/2}$ các phép toán, vì vậy nó thực sự tốt hơn một chút so với thuật toán đầu tiên. Tình huống với thuật toán thứ ba đem lại nhiều bài học hơn. Rõ ràng là sự thành công của nó chủ yếu phụ thuộc vào câu hỏi sau: Chúng ta có thể phân tích các số thành thừa số nguyên tố nhanh chậm như thế nào?

Câu hỏi này đã dành được sự quan tâm của các nhà toán học từ thời cổ đại, hàng thiên niên kỷ trước khi có giả thuyết cho rằng không có cách nào hiệu quả để giải quyết vấn đề phân tích ra thừa số nguyên tố, là cơ sở của hầu hết các hệ mật mã được sử dụng trong thế giới hiện đại. Thật không may, chúng ta không có cơ hội đi sâu vào vấn đề này (chủ đề này xứng đáng có một bài viết riêng), vì vậy chúng ta chỉ lưu ý rằng thuật toán tốt nhất được biết đến hiện nay trong trường hợp xấu nhất hoạt động trong thời gian $f(n) = 10^{Cn^{1/3}(\log_2 n)^{2/3}}$, trong đó C là một hằng số không quá lớn. Điều này đã tốt hơn đáng kể so với thuật toán thứ nhất và thứ hai, nhưng hàm vẫn tăng mũ.

Hãy nghĩ thêm một chút về thuật toán thứ ba. Về hình thức, nó là một cách đưa một bài toán về một bài toán khác, cụ thể là đưa bài toán tìm ước chung lớn nhất về bài toán phân tích một số thành thừa số nguyên tố. Điều này có nghĩa là bất kỳ tiến bộ nào trong việc giải quyết vấn đề thứ hai đều tự động kéo theo một tiến bộ tương đương trong việc giải quyết vấn đề đầu tiên. Như chúng ta sẽ thấy bên dưới, khái niệm chung về khả năng đưa bài toán này về một bài toán khác đóng một vai trò cực kỳ quan trọng trong lý thuyết độ phức tạp của thuật toán.

Trong thuật ngữ lập trình, nó tương ứng với khái niệm thủ tục hoặc chương trình con, Tuy nhiên, điều cần thiết là phải đảm bảo rằng thủ tục được gọi một cách "*không quá thường xuyên*" (trong trường hợp của thuật toán thứ ba - hai lần) và đối với các giá trị "*không quá*" lớn của tham số (trong trường hợp của chúng ta, nghĩa là là dữ liệu đầu vào). Liên quan đến việc tìm ước số chung lớn nhất, đã đến lúc chuyển sang một giải pháp mà nhiều độc giả dường như đã mong đợi từ lâu. "*Cơ sở*" của nhà toán học Hy Lạp cổ đại vĩ đại Euclid (khoảng 300 năm trước Công nguyên) được coi là một trong những cuốn sách vĩ đại nhất trong lịch sử nhân loại, trong đó đặt nền móng cho hình học hiện đại (các thuật ngữ "*không gian Euclid*", "*hệ metric Euclid*",... được khởi nguồn từ các trang của "*Cơ sở*"), và trong nhiều khía cạnh cho toàn bộ nền toán học hiện đại nói chung. Ít được biết đến hơn là Quyển VII có mô tả về các thuật toán lâu đời nhất còn tồn tại, và đang vẫn được sử dụng một cách tích cực cho đến ngày nay.

Thuật toán thứ tư và cuối cùng (thuật toán Euclid). Ta chia b cho a có dư $b = aq + r$, trong đó $0 \leqslant r \leqslant a - 1$ ở đâu. Sau đó, ta áp dụng đệ quy thuật toán cho cặp (r, a). Chia a cho r, $a = u \cdot r + s$ và thay thế cặp (r, a) bằng (s, r). Ta tiếp tiếp tục thực hiện cho đến khi đạt được một cặp có dạng $(0, d)$. Số thứ hai trong cặp kết quả sẽ là câu trả lời cần tìm.

Tại sao thuật toán này đúng? Và ngay cả khi nó đúng, tại sao nó lại nhanh? Câu trả lời cho những câu hỏi dạng này (tất nhiên là khi chúng không hoàn toàn hiển nhiên) được giải quyết trong một phần đặc biệt của lý thuyết độ phức tạp được gọi là phân tích thuật toán. Thuật toán Euclid hoạt động chính xác, bởi vì $(a, b) = (r, a) = (s, r) = \cdots$ như vậy, ước số chung lớn nhất, như các nhà toán học vẫn nói, là một bất biến của thủ tục này (so sánh với bài báo "*Trò chơi của* 15"), và đối với cặp cuối cùng, nó đúng bằng d. Nó hoạt động nhanh vì luôn có đánh giá $(a + r) \leqslant \frac{2}{3}(a + b)$. Do đó, tổng các số trong một cặp giảm theo cấp số nhân và đặc biệt, thuật toán chắc chắn sẽ hội tụ sau $f(n) \approx 10n$ phép lặp, đây là một hàm tuyến tính của số ký tự n trong cách viết của a và b. Kết quả thật ấn tượng nếu so với các phương pháp tiếp cận trước đây, và không thể ngờ là thuật toán Euclide đã có khoảng 2500 năm tuổi... Với tính đơn giản và hiệu quả của nó, ngày nay thuật toán Euclid và các tổng quát hóa của nó được sử dụng rộng rãi, cả trong toán lý thuyết và các ứng dụng, chủ yếu là trong mật mã.

Sự khác biệt cơ bản của hàm $10n$ so với tất cả những hàm mà chúng ta đã gặp trước đó là nó là hàm đa thức (nghĩa là nó có dạng $C \cdot n^d$ với $C, d > 0$ chứ không phải là hàm số mũ. Trong lý thuyết độ phức tạp hiện đại, các thuật toán có ước lượng độ phức tạp như vậy (trong trường hợp xấu nhất) được gọi là thuật toán đa thức và lớp của tất cả các bài toán có ít nhất một thuật toán đa thức được gọi là "P". Theo các thuật ngữ này, thuật toán Euclid thiết lập rằng bài toán tìm ước chung lớn nhất của hai số nằm trong lớp P.

Lớp P thường được đồng nhất với lớp của tất cả các bài toán có giải pháp hiệu quả theo nghĩa thực tế của từ này. Ta nhấn mạnh rằng chúng ta đang nói về một sự trừu tượng toán học, không cố gắng (và chưa bao giờ cố gắng) để mô tả thực tại một cách hoàn toàn chính xác.

Lớp P cũng cực kỳ thuận tiện theo quan điểm toán học, và điều này xuất phát từ quan sát đơn giản rằng nhân hai đa thức hoặc thay một đa thức vào một đa thức khác vẫn sẽ tạo ra một đa thức. Ví dụ, khi phân tích các thuật toán trước đây, ta đã viết $f(n) \approx$ để phân biệt giữa số lần "*thử*" (hoặc lần lặp) và số "*phép toán cơ bản*". Tuy nhiên, tất cả các phép toán số học được biết là được thực hiện trong thời gian đa thức (xem "*Số học nhanh*"), do đó, khi nghiên cứu sự thuộc vào lớp P, sự khác biệt này có thể bị bỏ qua và tập trung vào điều thực sự quan trọng, tức là số phép lặp. Những tình huống như vậy là phổ biến.

Một biểu hiện khác của sự bất biến đáng chú ý này là thực tế rằng lớp P không phụ thuộc vào sự lựa chọn của mô hình tính toán. Những người sử dụng C++ và Basic (và thậm chí cả những người thích FORTRAN hoặc, hoàn toàn kinh điển, máy Turing) là lớp P có một cho tất cả. Giả định rằng điều này sẽ luôn như vậy đối với bất kỳ thiết bị máy tính thông minh nào được gọi là *luận điểm Turing - Church mở rộng*.

Các thuật toán đa thức (trong nhiều trường hợp rất không tầm thường) tồn tại cho nhiều bài toán tự nhiên. Các phép toán số học cơ bản đã được nhắc tới trước đó, sự phân cấp tốt hơn của chúng bên trong lớp P có thể được tìm thấy trong bài "*Số học nhanh*". Thuật toán Euclid đưa ra một thuật toán đa thức để tìm ước chung lớn nhất của hai số (nhân tiện, làm thế nào để tính bội chung nhỏ nhất?). Các ví dụ "*đặc biệt xấu*" cho một phương thức simplex có nghĩa là: Các ví dụ mà trên đó nó chạy với thời gian mũ. Thuật toán đa thức thực sự đầu tiên cho quy hoạch tuyến tính được xây dựng bởi nhà toán học Liên Xô L.Khachiyan vào năm 1979.

Ta hãy cùng giở xem tuyển tập này.

Nhiều vấn đề quan trọng đối với các luồng vận tải "*Toán học của các luồng vận tải*" có các thuật toán đa thức. Các thuật toán liên quan đến Internet "*Toán học của Internet*" là các thuật toán chỉ theo nghĩa rộng, vì bản thân các bài toán vốn có tính động và phân tán. Chúng ta sẽ nói về chúng sau một chút, còn bây giờ chúng ta chỉ lưu ý rằng đa thức ở đây là một yêu cầu chắc chắn là cần thiết, nhưng không phải là đủ. Những người xử lý dữ liệu lớn thường nhấn mạnh vào các thuật toán *tuyến tính*, tức là những thuật toán mà $f(n) \leqslant Cn$.

Tất cả các thuật toán được sử dụng trong mật mã "*Về Ứng dụng của Toán học trong Mật mã*" đều là đa thức. Tuy nhiên, đây là một ví dụ khá hiếm khi dựa trên cả sự tồn tại của các thuật toán hiệu quả (đối với người dùng hợp pháp) và giả định rằng các thuật toán đó không tồn tại (trong trường hợp là đối thủ).

Các thuật toán được sử dụng để nén thông tin cũng là đa thức. Cuộc đấu tranh để cải thiện tốc độ mã hóa và giải mã trong lớp P - như trong trường hợp "*dữ liệu lớn*", sự khác biệt giữa thuật toán tuyến tính và thuật toán bậc hai là khá đáng chú ý.

Một thuật toán đơn giản cho sự tồn tại của chu trình Euler từ bài báo "*Từ những chuyến đi dạo ở Königsberg đến giải mã bộ gen*" là đa thức. Chút nữa chúng ta sẽ nói về bài toán đi cặp với nó là bài toán tìm chu trình Hamilton.

"*Trò chơi của* 15" có thể dễ dàng được tổng quát hóa thành "trò chơi của $n^2 - 1$ với số nguyên dương n tùy ý. Có (tác giả đã không xác minh chính xác tuyên bố này!) một thuật toán đa thức đối với n cho phép hai trạng tháng chẵn chỉ ra một đường dẫn biến đổi trạng thái này thành trạng thái kia. Nhân tiện, vấn đề này dễ dàng được đưa về (theo nghĩa của chúng ta) về một trường hợp riêng, khi một trong các trạng thái được sắp xếp hoàn toàn.

Một vấn đề khác đã nhận được sự quan tâm của các nhà toán học trong nhiều thiên niên kỷ là vấn đề xác định số nguyên tố. Mặc dù thuật toán "*gần như đa thức*" (ví dụ, thuật toán xác suất trong đó được phép tung đồng xu và mắc lỗi với xác suất thấp) đã được biết đến từ khá lâu, nhưng thuật toán đa thức theo nghĩa chặt chẽ của từ này đến mại năm 2002 mới được xây dựng. Khám phá này đã gây ra một tiếng vang lớn cả trong cộng đồng toán học và hơn thế nữa.

Rõ ràng, một số độc giả tại thời điểm này sẽ có một chút hoang mang: Sự khác biệt thực sự giữa kiểm tra nguyên tố và phân tích ra thừa số nguyên tố là gì? Có phải nó chỉ là một?

Hóa ra là không, và điều này tạo ra sự khác biệt đáng kể và khá tinh tế giữa *chứng minh xây dựng* và *chứng minh tồn tại* thuần túy. Ví dụ nhiều thuật toán "*gần như đa thức*" (với thuật toán cuối cùng để kiểm tra nguyên tố, tình huống phức tạp hơn một chút, nhưng nguyên tắc thì giống nhau), để chứng minh rằng số m là hợp số, sẽ đưa ra một phản ví dụ cho định lý nhỏ Fermat, nghĩa là, số a, sao cho $a^{m-1} \neq 1$ trong số học theo môđun m. Bạn có thể trích xuất phân tích *thực tế* của m ra thừa số nguyên tố từ chứng minh này không? Câu trả lời cho câu hỏi này là không rõ, một câu trả lời khẳng định dưới dạng một thuật toán đa thức sẽ dẫn đến những thay đổi rất đáng kể trong nền văn minh hiện đại, phần lớn dựa trên niềm tin rằng các hệ thống mật mã như RSA là an toàn.

Bây giờ chúng ta hãy cùng thử sức mạnh khiêm tốn của mình trong vấn đề phân tích ra thừa số nguyên tố. Như chúng ta đã lưu ý (thuật toán thứ ba), bài toán tìm ước chung lớn nhất của hai số được đưa về bài toán thừa số (phân tích thành thừa số nguyên tố), và thuật toán Euclide làm cho việc đưa về trở nên không cần thiết theo quan điểm thực tế. Toán học, tuy nhiên, phát triển theo các quy luật riêng của nó, và thực tế là một số cách tiếp cận hoặc kết quả hóa ra là "*lỗi thời*" (với tuổi đời của thuật toán Euclid, từ này ở đây, tất nhiên, là khá tương đối) hoàn toàn không có nghĩa là những ý tưởng được lồng vào đó cũng trở thành vô ích.

Trong trường hợp này, điều tự nhiên là cố gắng làm ngược lại và sử dụng thuật toán Euclid để phân tích các số ra thừa số. Thật vậy, để tìm một ước số không tầm thường của hợp số m (nhân tiện, bạn có rõ tại sao bài toán phân tích thừa số một cách hoàn toàn được rút gọn thành bài toán này không?), "*chỉ cần*" tìm một số n, với $1 < (m, n) < m$ sau đó có thể sử dụng thuật toán Euclide (hiệu quả!).

Tất nhiên, chúng ta không thể giải quyết một vấn đề như vậy trong điều kiện chung. Tuy nhiên, hóa ra ý tưởng này không phải là không thuyết phục như thoạt nhìn. Cụ thể, cách tiếp cận phân tích nhân tử là cơ sở của:

(1) Một số thuật toán "*phân tích mật mã*" quan trọng (tức là các thuật toán tìm kiếm lỗ hổng trong hệ thống mật mã khóa công khai).

(2) Một thuật toán lượng tử đa thức để phân tích các số, được phát minh bởi nhà toán học người Mỹ P. Shor vào năm 1995.

Ta dừng lại chi tiết hơn ở kết quả cuối cùng, vì nó đã tạo động lực mạnh mẽ cho sự phát triển của một lĩnh vực hiện đại khổng lồ được gọi là *tính toán lượng tử*, nơi đó các nhà toán học, chuyên gia về khoa học máy tính và các nhà vật lý làm việc cùng nhau. Không có gì khó hiểu ở đây: Một máy tính có thể sử dụng các định luật của cơ học lượng tử trên thực tế có thể phân tích các số $n-$bit thành các thừa số nguyên tố trong thời gian nhiều hơn Cn^2 một chút. Nhân tiện, bản thân thuật toán sử dụng một phép toán rất đẹp và bất ngờ: Ứng dụng thuật toán Euclide ở cuối hóa ra chỉ là phần nổi của tảng băng.

Một độc giả tập trung, dường như, tại thời điểm này sẽ hơi ngạc nhiên: Ở trên vừa nói rằng lớp P không phụ thuộc vào việc lựa chọn mô hình tính toán, và đột nhiên bây giờ đưa ra một thiết bị, ngay cả khi nó là mới là giả định, và đột nhiên ta có thể làm được những điều tuyệt vời đó. Không có lỗi gì ở đây cả. Cụ thể, thế giới mà chúng ta đang sống được sắp xếp theo một trong ba cách sau:

(1) Việc xây dựng một máy tính lượng tử thực tế là không thể (và do đó, mô hình này được coi là "*không hợp lý*").

(2) Luận điểm Turing - Church mở rộng là không chính xác (và rõ ràng là có thể có sai lệch so với luận điểm này, sử dụng các quy luật vật lý hoặc sinh học khác).

(3) Có một thuật toán đa thức *cổ điển* để phân tích các số (với tất cả các hệ quả sau đó). Chúng ta chỉ không biết chính xác nó hoạt động như thế nào. Về điều này, chúng ta chỉ có thể nói thêm rằng ở thế giới theo cách 1, việc không thể chế tạo được máy tính lượng tử rất có thể sẽ được xác định bởi những trở ngại cơ bản không thể hiểu được chứ không phải do trở ngại công nghệ: Kinh nghiệm phát triển của loài người cho thấy, nếu có đủ ý chí

(và đã có rất nhiều nguồn lực được đầu tư vào việc xây dựng máy tính lượng tử ở nhiều nước phát triển), thì sớm muộn gì cũng khắc phục được. Vì vậy, luận điểm phổ biến về sự bất bại của hoạt động này (ở đầu ra – hoặc là máy tính lượng tử hoặc là các định luật vật lý mới giải thích tính bất khả thi của nó) ít nhất không phải là không có cơ sở.

Bây giờ chúng ta sẽ nói một chút về vấn đề giới hạn dưới trong lý thuyết về độ phức tạp tính toán, cụ thể là, chứng minh với các bài toán thú vị cụ thể, bất kỳ thuật toán nào cũng phải có độ phức tạp $f(n) \geqslant \varepsilon \cdot b(n)$, trong đó $b(n)$ là một hàm cố định nào đó. Đỉnh cao ở đây là phép chứng minh rằng một bài toán thú vị không thuộc về lớp P, tức là nó không thừa nhận bất kỳ thuật toán nào có giới hạn trên về độ phức tạp $f(n) \leqslant C \cdot n^k$ (chúng ta sẽ nói về các ứng cử viên triển vọng sau). Lấy bài toán phân tích ra thừa số làm ví dụ.

Một sợi chỉ xuyên suốt bài viết của chúng ta là luận điểm rằng vấn đề phân tích ra thừa số không nằm trong P, và, khác với luận điểm Turing - Church, đây là một giả định toán học. Số giờ lao động để bác bỏ nó (bao gồm cả giờ của các nhà lý thuyết số và thuật toán số giỏi nhất) là không thể tính được. Điều này có nghĩa là chúng ta chỉ nên chấp nhận nó như một loại quy luật vật lý nào đó và làm điều gì đó khác?

Tất nhiên, đối với bất kỳ nhà toán học nào đang làm việc, câu hỏi này hoàn toàn là tu từ và tốt nhất có thể gây ra một nụ cười nhẹ. Việc trong một thời gian rất dài không ai có thể đưa một nghiệm không tầm thường của phương trình $x^n + y^n = z^n$ hoặc một đa tạp ba chiều với các đặc tính "*hoang dã*" (phản ví dụ cho giả thuyết Poincaré), chỉ khiến các nhà toán học thêm hăng máu để tìm kiếm chứng minh các khẳng định tương ứng, và điều này không vô ích. Trong quá trình giải quyết chúng, mà đỉnh cao là các công trình của A. Wiles và G. Perelman, cả một lý thuyết hài hòa đã được xây dựng, chiếm được vị trí xứng đáng của chúng trong tòa nhà toán học hiện đại.

Tương tự là trường hợp của vấn đề cận dưới của độ phức tạp, với sự khác biệt là nó vẫn còn bỏ ngỏ vào thời điểm hiện tại, mặc dù một số kết quả đáng khích lệ đã thu được trong những năm 1980 và 1990. Rõ ràng, để có lời giải hoàn chỉnh của nó sẽ cần đến một số ý tưởng mới (tuy nhiên, so với định lý Fermat hoặc phỏng đoán của Poincaré, vấn đề đánh giá cận dưới của độ phức tạp còn ở giai đoạn sơ khai). Lý do của tình trạng này là dễ hiểu. Bất kỳ sự chứng minh không tồn tại một thuật toán hiệu quả (giả sử, đa thức) cho một bài toán nhất định chắc chắn phải tính đến không chỉ tất cả các ý tưởng hiện có để xây dựng một thuật toán như vậy, mà còn tất cả các ý tưởng tiềm năng có thể xuất hiện trong tương lai: điều này, trên thực tế, chính là ý nghĩa của lý thuyết về độ phức tạp... Lớp ý tưởng này rất rộng, và hầu hết các kết quả cụ thể đã biết về vấn đề cận dưới đều thu được bằng cách thu hẹp nó lại.

Ở phần cuối của bài viết ngắn này, ta sẽ nói về tính đầy đủ NP: Đây chính xác là phần mà những thành công của lý thuyết về độ phức tạp tính toán đã trở nên rất ấn tượng. Cơ sở của lý thuyết NP-đầy đủ đã được đặt nền móng trong các công trình của các nhà toán học Mỹ S. Cook, R. Karp và nhà toán học Liên Xô L. Levin vào đầu những năm 70.

Hãy cùng xem xét vấn đề tìm ước số thực sự của một hợp số và so sánh nó với hai bài toán khác từ tuyển tập này: Tìm chu trình Hamilton "*Từ những chuyến đi dạo ở Königsberg đến giải mã bộ gen*" và giải Sudoku "*Giải Sudoku*", cái thứ hai, tất nhiên, phải được tổng quát hóa thành trường hợp của một bảng $n^2 \times n^2$. Có gì chung giữa chúng?

Ở cấp độ "*triết học*", rõ ràng là lời giải của tất cả các bài toán như vậy được chia thành hai giai đoạn hoàn toàn không cân bằng: Tìm kiếm hoặc đoán câu trả lời chính xác và kiểm tra nó. Giai đoạn sau dễ dàng thực hiện trong mọi trường hợp và có thể được giao cho máy tính hoặc thậm chí là cho học sinh phổ thông. Làm sao để tìm ra câu trả lời chính xác, chúng ta không có công thức chung, và trong trường hợp tốt nhất chúng ta chỉ có những lời khuyên hợp lý, đôi khi được gọi là phương pháp *heuristic* (xem, ví dụ "*Giải Sudoku*").

Tuy nhiên, điều tốt là câu trả lời đúng ít nhất là *ngắn*, hay một cách toán học, độ dài bit m của nó không vượt quá một đa thức độ dài bit n của chính bài toán. Do đó, luôn có một thuật toán *tìm kiếm vét cạn* tầm thường, thay vì một tìm kiếm có tổ chức, chỉ cần xét tất cả các khả năng một cách tuần tự cho đến khi tìm thấy điều mong muốn. Độ phức tạp của nó trong trường hợp xấu nhất khoảng $2^m \sim 2^{Cn^k}$. Nếu xét về độ tăng của hàm số mũ thì điều này dĩ nhiên không tốt cho lắm, nhưng chú ý là có những tình huống còn tệ hơn nhiều.

Từ mô tả được đưa ra trong đoạn trước, tương đối dễ dàng để xây dựng một định nghĩa toán học: Lớp các bài toán mà ở đó việc kiểm câu trả lời là đa thức, tức là, nằm trong lớp P. Ta sẽ thu được một định nghĩa tương đương, nếu như trong định nghĩa máy Turing đã đưa ra ở đầu bài bổ sung thêm tính không xác định, tức là cho phép máy theo ý mình chọn một hành vi từ danh sách những hành vi được đề xuất. Lớp các bài toán thu được theo cách này được gọi là NP, trong đó "N" gợi nhớ đến tính không xác định.

Hầu hết các bài toán mà chúng ta đã thảo luận trước đó thuộc về lớp này hoặc có thể dễ dàng đưa về dạng này. Tất nhiên, sự phổ biến này không phải là ngẫu nhiên. Nó phản ánh thực tế rằng NP là một mô hình toán học tốt cho bất kỳ hoạt động sáng tạo có tổ chức nào, bao gồm hành động sáng tạo thực tế là tìm lời giải và (thường là nhanh chóng và quen thuộc) để kiểm tra nó. Với sự đa dạng các bài toán như vậy trong NP, người ta mong đợi sự tồn tại của một cấu trúc phân cấp phong phú trong lớp này, cố gắng sắp xếp bài toán theo độ phức tạp nội tại của chúng, và các giả định bài toán này hay bài toán kia được xếp vào đâu...

Thực tế không có điều này xảy ra. Với rất ít ngoại lệ, lớp NP thực sự chỉ chia thành hai phần lớn. Phần đầu tiên là lớp P mà chúng ta đã biết, bao gồm tất cả các bài toán thuật toán có ít nhất một thuật toán hiệu quả (đa thức). Nói cách khác, đây là những bài toán trong đó việc liệt kê các lựa chọn có thể được thay thế bằng một thủ tục hiệu quả, mà chúng ta đã thấy ở ví dụ thuật toán Euclide (một ví dụ giáo khoa khác là bài toán về chu trình Euler từ bài báo "*Từ những chuyến đi dạo ở Königsberg đến giải mã bộ gen*").

Ở cực đối diện là cái gọi là các bài toán NP-đầy đủ, có tính chất mọi bài toán khác từ lớp NP có thể đưa về nó trong thời gian đa thức. Hóa ra là cả bài toán giải Sudoku và bài toán tìm chu trình Hamilton từ bài báo "*Từ những chuyến đi dạo ở Königsberg đến giải mã bộ gen*") và hơn một nghìn bài toán thuật toán (nếu tính đến cả các biến thể thì cỡ khoảng 10000) từ các lĩnh vực khác nhau của toán học, khoa học máy tính, khoa học tự nhiên, sinh học, xã hội học,... là NP-đầy đủ.

Do đó, bất kỳ thuật toán hiệu quả nào để giải Sudoku đều có thể được xây dựng lại thành một thuật toán hiệu quả để phân tích các số thành thừa số nguyên tố, xây dựng chu trình Hamilton và rất nhiều thứ hữu ích khác. Tất cả các đưa về như vậy đều có một "*đặc tính mô-đun*" rõ rệt: Chẳng hạn, việc đưa bài toán chu trình Hamilton về bài toán Sudoku trong thời gian đa thức được chia thành nhiều lần chuyển đổi tương đối ngắn từ bài toán trung gian tự nhiên này sang bài toán trung gian tự nhiên khác. Tất cả các bài toán mà chúng tôi gặp trên đường đi cũng có thể được tính vào NP-đầy đủ.

Nhưng giữa hai cực này thực tế không có gì cả. Một bài toán NP mà chúng ta không biết cách phân loại là phân tích ra thừa số nguyên tố, có một số ví dụ khác về loại này, được thúc đẩy bởi các giả định mật mã. Tất cả đều có tính chất là chỉ có một câu trả lời đúng. Một ví dụ trong đó tính chất cuối cùng không được thỏa mãn là bài toán đẳng cấu đồ thị (hai đồ thị được vẽ, liệu chúng có thể được "*xếp chồng*" lên nhau đến mức trùng hợp không) và các biến thể của nó.

Có lẽ đây là tất cả (hoặc ít nhất là những vấn đề quan trọng nhất) các bài toán tự nhiên mà ta không biết rõ tình trạng của chúng. Vì vậy, chúng ta có thể tự tin nói rằng việc phân loại các bài toán liệt kê thành đơn giản (P) và khó tối đa (NP-đầy đủ) là một trong những dự án phân loại thành công nhất trong lịch sử khoa học.

Vì tất cả những lý do này, bài toán về sự trùng hợp của các lớp P và NP (còn được gọi là bài toán liệt kê) là một trong những bài toán mở trọng tâm của toán học hiện đại. Hầu hết các chuyên gia tin rằng $P \neq NP$. Nhưng việc chứng minh sự kiện này đưa về bài toán tìm cận dưới của một bài toán NP-đầy đủ được chọn tùy ý, điều mà các nhà toán học chưa thể làm được.

Tính phổ biến của bài toán này được minh chứng cụ thể bởi sự chú ý đến nó của những nhà toán học nghiệp dư. Theo tiêu chí này, có lẽ bài toán liệt kê đã vượt qua cả giả thuyết của Fermat. Tuy nhiên, cả các chuyên gia ngoài logic toán học và khoa học máy tính cũng coi trọng nó. Bài toán liệt kê là một trong bảy bài toán mà Viện Toán học Clay đã đặt ra giải thưởng danh giá. Như đã biết, cho đến nay chỉ có một trong số chúng được giải quyết (giả thuyết của Poincaré - G. Perelman), để giải quyết những vấn đề còn lại, rất có thể, cũng sẽ cần đến những ý tưởng và cách tiếp cận mới, bản chất mà chúng ta thậm chí không có ý tưởng gần đúng như trong trường hợp của bài toán liệt kê.

Bổ sung, bình luận

Người ta đã nói rằng giữa các lớp P và các bài toán hoàn chỉnh NP, những cực kỳ đặc biệt này trong lớp NP thống nhất, có một số vấn đề vẫn chưa được phân loại. Về một trong số đó, bài toán đẳng cấu đồ thị, sau khi phát hành ấn bản đầu tiên của cuốn sách này vào năm 2015, nhà toán học người Mỹ gốc Hungary L. Babai đã chứng minh một kết quả cơ bản: Đối với bài toán này, có một thuật toán "*gần như đa thức*", nó đang chạy. thời gian là. Nó chỉ ra rằng bài toán đẳng cấu đồ thị ít nhất là không xa lớp P.

Tài liệu tham khảo

[1] Разборова А. А. О сложности вычислений. Математическое просвещение. Третья серия. 1999. Вып. 3. Стр. 127 – 141

[2] Разборова А. А. Алгебраическая сложность. 2-е изд., испр. М.: МЦНМО, 2019. Fortnow L. The Golden Ticket P, NP, and the Search for the Impossible. Princeton University Press, 2013. http://goldenticket.fortnow.com

[3] Lipton R. J. *The P = NP Question and Gödel's Lost Letter*. Springer, 2010. Theo các tư liệu của Blog http://rjlipton.wordpress.com

CÂU CỔ PHÁP (ĐỊNH LÍ PYTHAGORAS) TRONG Ý TRAI TOÁN PHÁP NHẤT ĐẮC LỤC (PHẦN II)

Đoàn Thị Lệ
Nghiên cứu sinh, National Tsing-Hua University, Taiwan
Lê Thị Nhàn
Trường THPT Nguyễn Thị Lợi, Sầm Sơn, Thanh Hóa
Tạ Duy Phượng
Cộng tác viên Viện Toán học, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam
Mai Văn Thu
Thạc sĩ Toán học
Cung Thị Kim Thành
Thạc sĩ Hán Nôm
Phan Ánh Tuyết
National Taiwan Normal University

TÓM TẮT

Chúng tôi tiếp tục gửi đến độc giả phần 2 của bài viết giới thiệu các bài toán hình học giải được nhờ sử dụng định lí Pythagoras trong cuốn sách toán chữ Hán *Ý Trai toán pháp nhất đắc lục* của Ý Trai Nguyễn Hữu Thận.

Nhận xét. *Nguyễn Hữu Thận đã nêu phương pháp "trường phương tích" giải hệ*

$$\begin{cases} a+b+c=m \\ a-b=n \\ a^2=b^2+c^2 \end{cases}$$

Bài toán 19 (Bài 2.2.52 - Trang 60). ***Hữu câu cổ hòa, hữu huyền dữ câu cổ hiệu chi hiệu*** *(nhất danh huyền hiệu hiệu)* ***cầu câu cổ huyền****. Có tổng cổ +câu và hiệu huyền(cổ-câu) (gọi là huyền hiệu hiệu). Tìm câu, cổ, huyền. Biết* $b+c=m, a-(b-c)=n$*. Tìm* a, b, c*.*

Lời giải (Trang 60). *Bình phương tổng cổ câu, là số thứ nhất:*

$$(b+c)^2=m^2.$$

Lại lấy tổng cổ + câu cộng với hiệu huyền-(cổ - câu), được tổng 2 câu + huyền, bình phương, là số thứ hai:

$$m+n=(b+c)+(a-(b-c))=2c+a \Leftrightarrow (2c+a)^2=(m+n)^2.$$

Hai số trừ cho nhau, được kết quả, chia đôi, là trường phương tích:

$$\frac{(2c+a)^2-(b+c)^2}{2}=\frac{3c^2+4ac+a^2-b^2-2bc}{2}=\frac{(m+n)^2-m^2}{2}=\frac{n^2+2mn}{2}.$$

Lại lấy hiệu huyền–(cổ-câu) cộng với tổng 2 câu+huyền, là tổng khoát+trường:

$$(a-(b-c))+(2c+a)=2a+3c-b=n+(m+n)=m+2n.$$

Trường phương tích nhân 4 , và bình phương của tổng khoát+trường trừ cho nhau, khai căn, được hiệu trường-khoát:

$$\begin{gathered}(2a+3c-b)^2-4\frac{\left(3c^2+4ac+a^2-b^2-2bc\right)}{2}=(m+2n)^2-2\left(n^2+2mn\right)\\ \Leftrightarrow \left(4a^2+9c^2+b^2+12ac-4ab-6bc\right)-\left(6c^2+8ac+2a^2-2b^2-4bc\right)=m^2+2n^2\end{gathered}$$

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow 2a^2+3c^2+3b^2+4ac-4ab-2bc=m^2+2n^2\\ &\Leftrightarrow 4a^2+c^2+b^2+4ac-4ab-2bc=m^2+2n^2\\ &\Leftrightarrow (2a-b+c)^2=m^2+2n^2 \Leftrightarrow 2a-b+c=\sqrt{m^2+2n^2}.\end{aligned}$$

Lấy tổng khoát+trường trừ hiệu khoát-trường, chia đôi, được khoát, là câu:

$$c=\frac{(2a+3c-b)-(2a-b+c)}{2}=\frac{(m+2n)-\sqrt{m^2+2n^2}}{2}. \tag{2.2.6}$$

Lấy tổng cổ + câu trừ đị câu, còn lại là cạnh cồ:

$$\begin{aligned}b&=(b+c)-c=m-c\\ &=m-\frac{m+2n-\sqrt{m^2+2n^2}}{2}=\frac{m-2n+\sqrt{m^2+2n^2}}{2}.\end{aligned} \tag{2.2.7}$$

Lại lấy huyền- (cồ-câu)+(cồ-câu), là cạnh huyền:

$$\begin{aligned}a&=(a-(b-c))+(b-c)=n+(b-c)\\ &=n+\frac{m-2n+\sqrt{m^2+2n^2}}{2}-\frac{m+2n-\sqrt{m^2+2n^2}}{2}\\ &=\sqrt{m^2+2n^2}\end{aligned} \tag{2.2.8}$$

Bài toán 20 (Ví dụ 2.2.7 - Trang 61). *Giả sử có tổng của cạnh cổ và câu là 23 xích, hiệu của hiệu cổ-câu và huyền là 10 xích. Hỏi các cạnh câu, cổ, huyền là bao nhiêu? Biết* $m=b+c=23, n=a-(b-c)=10$. *Tìm* a,b,c.

Lời giải (Trang 61, 63). *Lấy tổng của cạnh cổ và cạnh câu là 23 xich, bình phương, được 529 xich:* $m^2 = (b+c)^2 = 23^2 = 529$.

Lấy hiệu huyền–(cổ-câu) (10 xích) cộng với tổng cổ + câu (23 xích), được 33 xích, là tổngg của 2 câu+huyền, bình phương, được 1089 xích:

$$(m+n)^2 = ((a-(b-c)) + (b+c))^2 = (2c+a)^2 = (23+10)^2 = 33^2 = 1089.$$

Hai tích (hai số có được từ phép bình phương) trừ cho nhau, còn 560 xích, chia đôi, được 280 xích, là trường phương tích:

$$\frac{3c^2+4ac+a^2-b^2-2bc}{2} = \frac{(2c+a)^2-(b+c)^2}{2} = \frac{(m+n)^2-m^2}{2} = \frac{1089-529}{2} = 280.$$

Lấy hiệu huyền-(cổ-câu) (10 xích) cộng với tổng 2 câu+huyền (33 xích), được 43 xích, là tổng khoát+trường:

$$2a+3c-b = (a-(b-c)) + (2c+a) = n + (m+n) = 10 + (23+10) = 43.$$

Dùng "trường phương tích", có tổng khoát+trường, tìm hiệu khoát - trường, dùng các công thức của trường, khoát để tính toán.

Trường phương tích (280 xich) nhân 4, được 1120 xích; tổng khoát+trường (43 xích), bình phương, được 1849 xích; trừ cho nhau, được 729 xích, khai căn bậc hai, được 27 xich, là hiệu trường - khoát:

$$(2a-b+c)^2 = (2a+3c-b)^2 - 4\frac{\left(3c^2+4ac+a^2-b^2-2bc\right)}{2} = 43^2 - 4\times 280 = 729.$$
$$\Rightarrow 2a-b+c = 27.$$

Lấy trường + khoát (43 xích) trừ đi trường-khoát (27 xích), được 16 xích, chia đôi, được khoát 8 xích, là cạnh câu:

$$c = \frac{(2a+3c-b)-(2a-b+c)}{2} = \frac{43-27}{2} = 8.$$

Lấy tổng cổ + câu (23 xích) trừ đi cạnh câu (8 xích), còn 15 xích, là cạnh cổ:

$$b = (b+c) - c = m - c = 23 - 8 = 15.$$

Suy ra $b-c = 15-8 = 7$. *Vậy* $a = (a-(b-c)) + (b-c) = n + (b-c) = 10 + 7 = 17$.

Nhận xét. *Có thể tính trực tiếp theo công thức (2.2.6)-(2.2.8):*

$$c = \frac{m+2n-\sqrt{m^2+2n^2}}{2} = \frac{23+2\times 10-\sqrt{23^2+2\times 10^2}}{2} = 8.$$
$$b = \frac{m-2n+\sqrt{m^2+2n^2}}{2} = \frac{23-2\times 10+\sqrt{23^2+2\times 10^2}}{2} = 15.$$
$$a = \sqrt{m^2+2n^2} = \sqrt{23^2+2\times 10^2} = \sqrt{729} = 27.$$

Nguyễn Hữu Thận đã nêu phương pháp "trường phương tích" giải hệ

$$\begin{cases} b+c=m \\ a-(b-c)=n \\ a^2=b^2+c^2 \end{cases}$$

Bài toán 21 (Bài 2.2.53 - Trang 63). ***Hữu câu cổ hòa, hữu huyền dữ câu cổ hiệu chi hòa** (nhất danh huyền hiệu hòa), **cầu câu cổ huyền**. Có tổng cồ + câu và tổng huyền +(cồ câu) (gọi là huyền hiệu hòa). Tìm câu, cổ, huyền. Biết* $b+c=m, a+(b-c)=n$*. Tìm* a, b, c.

Lời giải (Trang 63). *Tổng cổ + câu, bình phương, được tích thứ nhất:*

$$m^2=(b+c)^2=b^2+2bc+c^2=a^2+2bc.$$

Tổng huyền + (cổ - câu), bình phương được tích thứ hai:

$$n^2=[a+(b-c)]^2=a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc=2a^2+2ab-2ac-2bc.$$

Lấy hai tích cộng với nhau, là trường phương tích:

$$m^2+n^2=3a^2+2ab-2ac.$$

Lấy tổng huyền + (cổ - câu), nhân đôi, là hiệu trường - khoát:

$$2(a+(b-c))=2n..$$

Dựa theo phép thay thế dùng trường phương tích, có hiệu trường - khoát, tìm tổng của trường + khoát, dựa vào các công thức của trường, khoát để tính toán.

Trường phương tích nhân 4 , cộng với bình phương của hiệu trường-khoát, khai căn, được tổng khoát + trường:

$$\begin{aligned}
&4\left(3a^2+2ab-2ac\right)+[2(a+(b-c))]^2=4\left(m^2+n^2\right)+4n^2=4\left(m^2+2n^2\right)\\
&\Leftrightarrow 12a^2+8ab-8ac+4a^2+4b^2+4c^2+8ab-8ac-8bc=4\left(m^2+2n^2\right)\\
&\Leftrightarrow 16a^2+4b^2+4c^2+16ab-16ac-8bc=4\left(m^2+2n^2\right)\\
&\Leftrightarrow (4a+2b-2c)^2=4\left(m^2+2n^2\right)\\
&\Leftrightarrow 4a+2b-2c=2\sqrt{m^2+2n^2}.
\end{aligned}$$

Lấy tổng trường+khoát trừ đi hiệu trường - khoát, chia đôi, được khoát, là cạnh huyền:

$$2a=(4a+2b-2c)-(2a+2b-2c)=2\sqrt{m^2+2n^2}-2n\Rightarrow a=\sqrt{m^2+2n^2}-n.$$

Lấy tổng huyền +(cồ-câu) trừ đi cạnh huyền, còn hiệu cổ-câu:

$$b-c=(a+(b-c))-a=n-\left(\sqrt{m^2+2n^2}-n\right)=2n-\sqrt{m^2+2n^2}.$$

Lấy tổng trừ hiệu, chia đôi, được cạnh câu:

$$c = \frac{(b+c)-(b-c)}{2} = \frac{m - \left(2n - \sqrt{m^2+2n^2}\right)}{2} = \frac{m - 2n + \sqrt{m^2+2n^2}}{2}.$$

Lấy tổng cộng hiệu, chia đôi, được cạnh cổ:

$$b = \frac{(b+c)+(b-c)}{2} = \frac{m + \left(2n - \sqrt{m^2+2n^2}\right)}{2} = \frac{m + 2n + \sqrt{m^2+2n^2}}{2}..$$

Nhận xét. *Nguyễn Hữu Thận đã nêu phương pháp "trường phương tích" giải hệ*

$$\begin{cases} b+c=m \\ a+(b-c)=n \\ a^2=b^2+c^2 \end{cases}$$

Bài toán 22 (Bài 2.2.54 - Trang 64). ***Hữu câu huyền hòa, hữu huyền dữ câu cổ hòa chi hiệu*** *(nhất danh huyền hòa hiệu),* ***cầu câu cổ huyền****. Có tổng huyền+câu và hiệu (cổ+câu)-huyền (gọi là huyền hòa hiệu). Tìm câu, cổ, huyền. Biết* $a+c=m$, $(b+c)-a=n$*. Tìm* a, b, c*.*

Lời giải (Trang 64). *Tổng huyền+câu bình phương:*

$$m^2 = (a+c)^2 = a^2 + 2ac + c^2.$$

Lấy tổng huyền + câu cộng với hiệu (cổ+câu) -huyền, là tổng 2 câu + cổ, nhân với tổng huyền + câu cùng với bình phương của tổng huyền+câu, trừ cho nhau, kết quả là trường phương tích. Vì tổng huyền + câu là tổng trường +khot*, dựa vào phương pháp dùng trường phương tích, có tổng trường + khoát, tìm hiệu trường - khoát, dùng các công thức của trường, khoát để tính toán trường phương tích:*

$$\begin{aligned} & m+n = (a+c) + ((b+c)-a) = 2c+b \\ & \Rightarrow (2c+b)(a+c) - (a+c)^2 = (m+n)m - m^2 \\ & \Leftrightarrow 2ac + 2c^2 + ab + bc - \left(a^2 + 2ac + c^2\right) = mn \\ & \Leftrightarrow ab + bc + c^2 - a^2 = mn \\ & \Leftrightarrow ab + bc - b^2 = mn. \end{aligned}$$

Trường phương tích nhân với 4 , bình phương tổng trường + khoát, trừ cho nhau, được kết quả, khai phương, là hiệu trường–khoát:

$$\begin{aligned} & (a+c)^2 - 4\left(ab + bc - b^2\right) = m^2 - 4mn \\ & \Leftrightarrow a^2 + c^2 + 4b^2 + 2ac - 4ab - 4bc = m^2 - 4mn \\ & \Leftrightarrow (a - 2b + c)^2 = m^2 - 4mn \\ & \Leftrightarrow a - 2b + c = \sqrt{m^2 - 4mn}. \end{aligned}$$

Lấy hiệu trường-khoát cộng với tổng trường + khoát, chia đôi, được trường, là cạnh cồ:

$$\begin{cases} a+c=m \\ a-2b+c=\sqrt{m^2-4mn} \end{cases} \Rightarrow b=\frac{m-\sqrt{m^2-4mn}}{2}.$$

Lấy cạnh cổ trừ đi hiệu (cổ + câu)-huyền, còn lại hiệu huyền-câu:

$$a-c=b-((b+c)-a)=\frac{m-\sqrt{m^2-4mn}}{2}-n=\frac{m-2n-\sqrt{m^2-4mn}}{2}.$$

Lấy tổng cộng hiệu, chia đôi, là cạnh huyền. Lấy tổng trừ hiệu, chia đôi, là cạnh câu: Do $a+c=m$ nên

$$\begin{cases} a=\frac{(a+c)+(a-c)}{2}=\frac{m+\frac{m-2n-\sqrt{m^2-4mn}}{2}}{2}=\frac{3m-2n-\sqrt{m^2-4mn}}{4} \\ c=\frac{(a+c)-(a-c)}{2}=\frac{m-\frac{m-2n-\sqrt{m^2-4mn}}{2}}{2}=\frac{m+2n+\sqrt{m^2-4mn}}{4}. \end{cases}$$

Nhận xét. *Nguyễn Hữu Thận đã nêu phương pháp truòng phuoong tích giải hệ*

$$\begin{cases} a+c=m \\ (b+c)-a=n \\ a^2=b^2+c^2 \end{cases}$$

Bài toán 23 (Bài 2.2.55 - Trang 65). ***Hữu câu huyền hòa, hưuu huyền dữ câu cổ hiệu chi hòa*** *(nhất danh huyền hiệu hòa),* ***cầu câu cồ huyền****. Biết tổng huyền+câu và huyền +(cổ-câu) (gọi là huyền hiệu hòa). Tìm câu, cổ, huyền. Biết $a+c=m, a+(b-c)=n$. Tìm a,b,c.*

Lời giải (Trang 65). *Lấy tổng huyền + câu, bình phương:*

$$m^2=(a+c)^2=a^2=2ac+c^2.$$

Lấy tổng huyền + câu, cộng với tổng huyền + (cổ - câu), là tổng hai lần huyền + cổ, bình phương:

$$2a+b=(a+c)+(a+(b-c))=m+n\Rightarrow(m+n)^2=(2a+b)^2=4a^2+4ab+b^2.$$

Cộng hai số có được từ phép bình phương với nhau, là trường phương tích:

$$m^2+(m+n)^2=\left(a^2+2ac+c^2\right)+\left(4a^2+4ab+b^2\right)=6a^2+4ab+2ac.$$

Lấy tổng 2 huyền + cổ nhân đôi, là 4 huyền +2 cổ, cộng với tổng huyền + câu, là tổng trường + khoát.

$$\begin{aligned} &2(2a+b)+(a+c)=5a+2b+c\Leftrightarrow 2(m+n)+m=5a+2b+c \\ &\Leftrightarrow 3m+2n=5a+2b+c. \end{aligned}$$

Dựa theo phép "đại dụng trường phương tích", có tổng trường + khoát, tìm hiệu trường - khoát, dùng các công thức của trường, khoát để tính toán.

Lấy 4 nhân với trường phương tích, cùng bình phương của tổng trường + khoát, trừ cho nhau, khai căn, được hiệu trường - khoát:

$$\begin{aligned}&(5a+2b+c)^2-4\left(6a^2+4ab+2ac\right)=(3m+2n)^2-4\left[m^2+(m+n)^2\right]\\&\Leftrightarrow a^2+4b^2+c^2+4ab+2ac+4bc=m^2+4mn\\&\Leftrightarrow (a+2b+c)^2=m^2+4mn\Leftrightarrow a+2b+c=\sqrt{m^2+4mn}\end{aligned}$$

Lấy tổng trường + khoát trừ đi hiệu trường - khoát, chia đôi, được khoát, lấy khoát chia đôi, là cạnh huyền.

$$\begin{cases}5a+2b+c=3m+2n\\a+2b+c=\sqrt{m^2+4mn}\end{cases}\Rightarrow a=\frac{3m+2n-\sqrt{m^2+4mn}}{4}$$

Lấy tổng huyền + câu, trừ đi cạnh huyền, còn lại là cạnh câu:

$$c=(a+c)-a=m-\frac{3m+2n-\sqrt{m^2+4mn}}{4}=\frac{m-2n+\sqrt{m^2+4mn}}{4}.$$

Ở tổng huyền + (cổ-câu) trừ đi huyền, còn lại là hiệu cổ - câu:

$$\begin{aligned}b-c&=(a+(b-c))-a\\&=n-\frac{3m+2n-\sqrt{m^2+4mn}}{4}=\frac{2n-3m+\sqrt{m^2+4mn}}{4}.\end{aligned}$$

Lấy cạnh câu cộng với hiệu cồ - câu, được cạnh cổ.

$$\begin{aligned}&b=(b-c)+c=\\&=\frac{2n-3m+\sqrt{m^2+4mn}}{4}+\frac{m-2n+\sqrt{m^2+4mn}}{4}=\frac{\sqrt{m^2+4mn}-m}{2}.\end{aligned}$$

Nhận xét. *Nguyễn Hữu Thận đã nêu phương pháp trường phurong tích giải hệ*

$$\begin{cases}a+c=m\\a+(b-c)=n\\a^2=b^2+c^2\end{cases}$$

Bài toán 24 (Bài 2.2.56 - Trang 66). ***Hữu cô huyền hòa, hữu huyền dữ câu cô hòa chi hiệu, cầu câu cô huyền.*** *Có tổng huyền + cổ và hiệu (cổ + câu) - huyền. Tìm câu, cổ, huyền. Biết $a+b=m,(b+c)-a=n$. Tìm a,b,c.*

Lời giải (Trang 66). *Bình phương tổng huyền + cổ, được thừa số thứ nhất:*

$$m^2=(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.$$

Lấy tổng huyền+cổ cộng với hiệu (cổ + câu) - huyền, được kết quả là tổng hai lần cổ + câu, nhân với tổng huyền + cổ, là thừa số thứ hai:

$$\begin{aligned}&m+n=(a+b)+(b+c-a)=2b+c\\&\Rightarrow (2b+c)(a+b)=(m+n)m.\end{aligned}$$

Hai thừa số trừ cho nhau, được kết quả là trường phương tích:

$$\Rightarrow (2b+c)(a+b)-(a+b)^2=(m+n)m-m^2$$

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow 2ab+2b^2+ac+bc-\left(a^2+2ab+b^2\right)=mn\\&\Leftrightarrow ac+bc+b^2-a^2=mn\\&\Leftrightarrow ac+bc-c^2=mn\end{aligned}$$

Coi tổng huyền + cổ là tổng trường + khoát, dựa theo phép "đại dụng trường phương tích", có tổng trường + khoát, tìm hiệu trường-khoát, dùng các công thức của trường, khoát để tính toán. Trường phương tích nhân với 4 , cùng với bình phương của tổng khoát + trường, trừ cho nhau, khai căn, được hiệu trường - khoát:

$$\begin{aligned}&(a+b)^2-4\left(ac+bc-c^2\right)=m^2-4mn\\&\Leftrightarrow a^2+b^2+4c^2+2ab-4ac-4bc=m^2-4mn\\&\Leftrightarrow (a+b-2c)^2=m^2-4mn\\&\Leftrightarrow a+b-2c=\sqrt{m^2-4mn}.\end{aligned}$$

Lấy tổng trường + khoát, trừ đi hiệu trường - khoát, chia đôi, được khoát, là câu:

$$\begin{cases}a+b=m\\a+b-2c=\sqrt{m^2-4mn}\end{cases}\Rightarrow c=\frac{m-\sqrt{m^2-4mn}}{2}.$$

Ta có

$$a-b=c-((b+c)-a)=\frac{m-\sqrt{m^2-4mn}}{2}-n=\frac{m-2n-\sqrt{m^2-4mn}}{2}.$$

Do $a+b=m$ nên lại lấy hiệu đó cộng với tổng huyền + cổ, chia đôi, là cạnh huyền và cạnh cổ:

$$\begin{cases}a=\frac{(a+b)+(a-b)}{2}=\frac{m+\frac{m-2n-\sqrt{m^2-4mn}}{2}}{2}=\frac{3m-2n-\sqrt{m^2-4mn}}{4}\\b=\frac{(a+b)-(a-b)}{2}=\frac{m-\frac{m-2n-\sqrt{m^2-4mn}}{2}}{2}=\frac{m+2n+\sqrt{m^2-4mn}}{4}.\end{cases}$$

Nhận xét. *Nguyễn Hữu Thận đã nêu phương pháp "trường phương tích" giải hệ phương trình bậc hai*

$$\begin{cases}a+b=m\\(b+c)-a=n\\a^2=b^2+c^2\end{cases}$$

Bài toán 25 (Bài 2.2.57 - Trang 67). ***Hữu cổ huyền hòa, hữu huyền dữ câu cổ hiệu chi hiệu*** *(nhất danh huyền hiệu hiệu),* ***cầu câu cổ huyền****. Có tổng huyền+cổ, hiệu huyền(cổ-câu) (gọi là huyền hiệu hiệu). Tìm câu, cổ, huyền. Biết $a+b=m, a-(b-c)=n$. Tìm a,b,c.*

Lời giải (Trang 67). *Bình phương tổng huyền + cồ, là số thứ nhất:*

$$m^2 = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Lấy tổng huyền + cổ cộng với hiệu huyền - (cổ - câu), được tổng 2 huyền + câu, bình phương, là số thứ hai:

$$(a+b) + (a-(b-c)) = m+n \Leftrightarrow (2a+c)^2 = 4a^2 + 4ac + c^2 = (m+n)^2.$$

Lấy hai số cộng cho nhau là trường phương tích:

$$m^2 + (m+n)^2 = \left(a^2 + 2ab + b^2\right) + \left(4a^2 + 4ac + c^2\right) = 6a^2 + 2ab + 4ac.$$

Nhân đôi tổng 2 huyền + câu, được 4 huyền + 2câu, cộng với tổng huyền + cổ, là tổng trường + khoát:

$$\begin{aligned} &2(2a+c) + (a+b) = 5a + b + 2c \\ &\Leftrightarrow 2(m+n) + m = 5a + b + 2c \\ &\Leftrightarrow 3m + 2n = 5a + b + 2c. \end{aligned}$$

Dựa theo phép "đại dụng trường phương tích", có tổng trường +khot, *tìm hiệu trường-khoát, dùng các công thức của trường, khoát để tính toán.*

Trường phương tích nhân với 4 , cùng với bình phương của tổng trường + khoát, trừ cho nhau, khai căn, được hiệu trường-khoát:

$$\begin{aligned} &(5a+b+2c)^2 - 4\left(6a^2 + 2ab + 4ac\right) = (3m+2n)^2 - 4\left[m^2 + (m+n)^2\right] \\ &\Leftrightarrow a^2 + b^2 + 4c^2 + 2ab + 4ac + 4bc = m^2 + 4mn \\ &\Leftrightarrow (a+b+2c)^2 = m^2 + 4mn \\ &\Leftrightarrow a + b + 2c = \sqrt{m^2 + 4mn}. \end{aligned}$$

Lấy tổng trường + khoát, trừ đi hiệu trường - khoát, chia đôi, được "khoát pháp", lấy khoát chia đôi là cạnh huyền:

$$\begin{cases} 5a + b + 2c = 3m + 2n \\ a + b + 2c = \sqrt{m^2 + 4mn} \end{cases} \Rightarrow a = \frac{3m + 2n - \sqrt{m^2 + 4mn}}{4}$$

Trong tổng huyền + cồ trừ đi cạnh huyền, còn lại là cạnh cổ:

$$b = (a+b) - a = m - \frac{3m + 2n - \sqrt{m^2 + 4mn}}{4} = \frac{m - 2n + \sqrt{m^2 + 4mn}}{4}.$$

Lại lấy cạnh huyền trừ đi hiệu huyền – (cổ - câu), phần còn lại là hiệu cổ-câu:

$$b - c = a - (a - (b-c)) = \frac{3m + 2n - \sqrt{m^2 + 4mn}}{4} - n = \frac{3m - 2n - \sqrt{m^2 + 4mn}}{4}.$$

Lấy cạnh cồ trừ đi hiệu cổ–câu, phần còn lại là cạnh câu.

$$c = b - (b-c) = \frac{m - 2n + \sqrt{m^2 + 4mn}}{4} - \frac{3m - 2n - \sqrt{m^2 + 4mn}}{4} = \frac{\sqrt{m^2 + 4mn} - m}{2}.$$

Nhận xét. *Nguyễn Hữu Thận đã nêu phương pháp "trường phương tích" giải hệ*

$$\begin{cases} a+b=m \\ a-(b-c)=n \\ a^2=b^2+c^2. \end{cases}$$

Bài toán 26 (Bài 2.2.58 - Trang 71). ***Hữu câu cổ hiệu, hữu huyền dữ câu cổ hòa chi hiệu*** *(nhất danh huyền hòa hiệu)* ***cầu câu cổ huyền****. Có hiệu cổ-câu, hiệu (câu+cổ) huyền (gọi là huyền hòa hiệu). Tìm câu, cổ, huyền. Biết* $b-c=m,(b+c)-a=n$. *Tìm* a,b,c.

Lời giải (Trang 71). *Lấy hiệu (cổ + câu) – huyền, bình phương, chia đôi, là trường phương tích:*

$$\frac{n^2}{2}=\frac{((b+c)-a)^2}{2}=\frac{b^2+c^2+a^2+2bc-2ab-2ac}{2}=a^2+bc-ab-ac.$$

Vì hiệu cổ-câu là hiệu trường-khoát, dựa theo phép "đại dụng trường phương tích", có tổng trường + khoát, tìm hiệu trường-khoát, dùng các công thức của trường, khoát để tính toán.

Trường phương tích nhân với 4, cộng với bình phương của hiệu trường-khoát, khai căn, được tổng trường + khoát:

$$\begin{aligned} &4\left(a^2+bc-ab-ac\right)+(b-c)^2=2n^2+m^2 \\ &\Leftrightarrow 4a^2+b^2+c^2+2bc-4ac-4ab=m^2+2n^2 \\ &\Leftrightarrow (2a-b-c)^2=m^2+2n^2 \\ &\Leftrightarrow 2a-b-c=\sqrt{m^2+2n^2}. \end{aligned}$$

Lấy tổng trường + khoát, trừ đi hiệu trường - khoát, chia đôi, được "khoát pháp":

$$\begin{cases} 2a-b-c=\sqrt{m^2+2n^2} \\ b-c=m \end{cases} \Rightarrow a-b=\frac{\sqrt{m^2+2n^2}-m}{2}.$$

Vì khoát là hiệu của huyền - cổ, nên lấy khoát, cộng với hiệu (cồ + câu) - huyền, được cạnh câu:

$$c=(a-b)+((b+c)-a)=\frac{\sqrt{m^2+2n^2}-m}{2}+n=\frac{\sqrt{m^2+2n^2}-m+2n}{2}.$$

Câu cộng với hiệu cổ - câu là cạnh cổ:

$$b=c+(b-c)=\frac{\sqrt{m^2+2n^2}-m+2n}{2}+m=\frac{\sqrt{m^2+2n^2}+m+2n}{2}.$$

Cạnh cổ cộng với hiệu huyền - cồ là cạnh huyền:

$$a=b+(a-b)=\frac{\sqrt{m^2+2n^2}+m+2n}{2}+\frac{\sqrt{m^2+2n^2}-m}{2}=\sqrt{m^2+2n^2}+n.$$

Nhận xét. *Nguyễn Hữu Thận đã nêu phương pháp "trường phương tích" giải hệ*

$$\begin{cases} b - c = m \\ (b + c) - a = n \\ a^2 = b^2 + c^2. \end{cases}$$

Bài toán 27 (Bài 2.2.59 - Trang 72). ***Hữu câu huyền hiệu, hữu huyền dữ câu cổ hiệu chi hiệu** (nhất danh huyền hiệu hiệu), **cầu câu cổ huyền**. Có hiệu huyền–câu, hiệu huyền(cổ-câu). Tìm câu, cổ, huyền. Biết $a - c = m, a - (b - c) = n$. Tìm a, b, c.*

Lời giải (Trang 72). *Lấy hiệu huyền – (cồ - câu) bình phương, làm số thứ nhất:*

$$n^2 = (a - (b - c))^2.$$

Lấy hiệu huyền-câu cộng với hiệu huyền - (cồ - câu) bình phương, làm số thứ hai:

$$2a - b = (a - c) + (a - (b - c)) = m + n \Rightarrow (2a - b)^2 = (m + n)^2.$$

Lấy hai số trừ cho nhau, lại lấy nó trừ đi bình phương của huyền-câu, được kết quả, chia đôi, là trường phương tích:

$$\frac{(2a - b)^2 - (a - (b - c))^2 - (a - c)^2}{2} = \frac{(m + n)^2 - n^2 - m^2}{2} = mn.$$

Vì hiệu huyền-câu là hiệu trường - khoát, dựa theo phép "đại dụng trường phương tích", có hiệu trường - khoát, tìm tổng trường + khoát, dùng các công thức của trường, khoát để tính toán. Trường phương tích nhân với 4 , cùng với bình phương của hiệu trường - khoát, cộng với nhau, khai căn, được tổng trường + khoát:

$$\begin{aligned}
&4mn + m^2 = 4\left\{\left[(2a - b)^2 - (a - (b - c))^2 - (a - c)^2\right] : 2\right\} + (a - c)^2 \\
&= 2\left(2a^2 - 2c^2 - 2ab + 2bc\right) + \left(a^2 - 2ac + c^2\right) \\
&= 5a^2 - 3c^2 - 4ab + 4bc - 2ac = a^2 + c^2 + 4\left(a^2 - c^2\right) - 4ab + 4bc - 2ac \\
&= a^2 + c^2 + 4b^2 - 4ab + 4bc - 2ac = (2b + c - a)^2 \\
&\Rightarrow 2b + c - a = \sqrt{m^2 + 4mn}
\end{aligned}$$

Lấy hiệu trường - khoát cộng với tổng trường + khoát, chia đôi, được trường, là cạnh cồ:

$$b = \frac{(2b + c - a) + (a - c)}{2} = \frac{\sqrt{m^2 + 4mn} + m}{2}. \qquad (2.2.9)$$

Lấy cổ cộng với huyền+(huyền–cổ), chia đôi, là cạnh huyền:

$$a = \frac{(2a - b) + b}{2} = \frac{(m + n) + \dfrac{\sqrt{m^2 + 4mn} + m}{2}}{2} = \frac{3m + 2n + \sqrt{m^2 + 4mn}}{4}. \qquad (2.2.10)$$

Lấy huyền trừ đi hiệu huyền–câu, là cạnh câu:

$$c = a - (a - c) = \frac{3m + 2n + \sqrt{m^2 + 4mn}}{4} - m = \frac{2n - m + \sqrt{m^2 + 4mn}}{4}. \qquad (2.2.11)$$

Bài toán 28 (Ví dụ 2.2.8 - Trang 73). *Giả sử có hiệu huyền-câu là 9 xích, hiệu huyền – (cổ - câu) là 10 xích, hỏi các cạnh câu, cổ, huyền là bao nhiêu?*

Lời giải (Trang 73). *Lấy hiệu huyền - (cổ - câu) là 10 xích, bình phương, được 100 xích, là số thứ nhất:*

$$a-(b-c)=10 \Rightarrow (a-(b-c))^2=100.$$

Lại lấy hiệu huyền-câu là 9 xích, cộng với hiệu huyền – (cổ - câu) là 10 xích, được 19 xích, tức là tổng của huyền + (huyền - cổ), bình phương, được 361 , là số thứ hai:

$$2a-b=(a-c)+(a-(b-c))=9+10=19 \Rightarrow (2a-b)^2=19^2=361.$$

Lấy hai số trừ cho nhau, còn 261 :

$$\begin{aligned}&2a^2+b^2-2ac-2ab+2bc=4a^2-4ab+b^2-\left(a^2+b^2+c^2-2ab+2ac-2bc\right)\\&=(2a-b)^2-(a-(b-c))^2=361-100=261.\end{aligned}$$

Lại lấy 261 trừ đi bình phương của hiệu huyền–câu, 9 xích, là 81 xích, còn 180 xích, chia đôi, được 90 xích, là trường phương tích:

$$\begin{aligned}&2a^2-2c^2-2ab+2bc=(2a-b)^2-(a-(b-c))^2-(a-c)^2=361-100-81=180.\\&\Rightarrow \left[(2a-b)^2-(a-(b-c))^2-(a-c)^2\right]:2=(361-100-81):2=90.\end{aligned}$$

Vì hiệu cổ - câu, 9 xích, là hiệu trường - khoát, thay hai hiệu này cho nhau để lập phép tính.

Lấy 4 nhân trường phương tích, được 360 xích, cộng với bình phương của hiệu cổ-câu, 9 xích, là 81 xích, được 441 xích, khai căn, được 21 xích, là tổng trường + khoát :

$$\begin{aligned}&4\left\{\left[(2a-b)^2-(a-(b-c))^2-(a-c)^2\right]:2\right\}+(a-c)^2\\&=2\left(2a^2-2c^2-2ab+2bc\right)+\left(a^2-2ac+c^2\right)\\&=5a^2-3c^2-4ab+4bc-2ac=a^2+c^2+4\left(a^2-c^2\right)-4ab+4bc-2ac\\&=a^2+c^2+4b^2-4ab+4bc-2ac=(2b+c-a)^2.\end{aligned}$$

Suy ra $(2b+c-a)^2=4\times 90+9^2=441$ *hay* $2b+c-a=21$. *Tổng trường + khoát cộng với hiệu trường - khoát, 9 xích, được 30 xích, chia đôi, được trường là 15 xích, là cạnh cổ:*

$$b=\frac{(2b+c-a)+(a-c)}{2}=\frac{21+9}{2}=15.$$

Cổ cộng với tổng huyền+(huyền-cổ), 19 xích, được 34 xích, chia đôi, được 17 xích, là cạnh huyền: $a=\dfrac{b+(2a-b)}{2}=\dfrac{15+19}{2}=17$. *Lấy cạnh huyền trừ đi hiệu huyền–câu, 9 xích, còn lại 8 xích là cạnh câu:*

$$c=a-(a-c)=17-9=8.$$

Nhận xét. *Có thể thay $a-c=m=9, a-(b-c)=n=10$ vào các công thức (2.2.9)-(2.2.11) để tính:*

$$b=\frac{\sqrt{m^2+4mn}+m}{2}=\frac{\sqrt{9^2+4\times 9\times 10}+9}{2}=\frac{21+9}{2}=15.$$
$$a=\frac{3m+2n+\sqrt{m^2+4mn}}{4}=\frac{3\times 9+2\times 10+21}{4}=17.$$
$$c=\frac{2n-m+\sqrt{m^2+4mn}}{4}=\frac{2\times 10-9+21}{4}=8.$$

Nhận xét. *Nguyễn Hữu Thận đã trình bày phương pháp trường phirơng tích giải hệ phương trình*

$$\begin{cases} a-c=m \\ a-(b-c)=n \\ a^2=b^2+c^2. \end{cases}$$

Bài toán 29 (Bài toán 2.2.60 - Trang 75). ***Hữu cổ huyền hiệu, hữu huyền dữ câu cổ hiệu chi hòa*** *(nhất danh huyền hiệu hòa),* ***cầu câu cổ huyền****. Có hiệu huyền-cổ, tổng huyền + (cổ-câu). Tìm câu cổ huyền. Biết $a-b=m, a+(b-c)=n$. Tìm a,b,c.*

Lời giải (Trang 75). *Lấy tổng (cổ – câu) + huyền trừ đi hiệu huyền – cổ, bình phương, được số thứ nhất:*

Lời giải.

$$(2b-c)^2=(a+(b-c))-(a-b)=(n-m)^2.$$

Lại lấy tổng (cồ - câu) + huyền, bình phương, được số thứ hai:

$$(a+(b-c))^2=n^2.$$

Lấy hai số có được từ phép bình phương, trừ cho nhau:

$$(a+(b-c))^2-(2b-c)^2=n^2-(n-m)^2.$$

Lấy bình phương của tổng (cồ - câu) + cổ trừ đi hiệu vừa tìm được, được kết quả là trường phương tích:

$$(2b-c)^2-\left[(a+(b-c))^2-(2b-c)^2\right]=2(n-m)^2-n^2=n^2-4mn+2m^2.$$

Lấy tổng (cổ - câu) + cổ, nhân đôi, trừ đi hiệu huyền - cổ, được kết quả là tổng trường + khoát :

$$5b-a-2c=2(2b-c)-(a-b)=2(n-m)-m=2n-3m.$$

Dựa theo phép đại dụng trường phương tích, có tổng trường + khoát, tìm hiệu trường-khoát, dùng các công thức của trường, khoát để tính toán.
Trường phương tích nhân với 4 , cùng với bình phương của tổng, trừ cho nhau, được kết quả khai căn, được hiệu trường-khoát:

$$(2b-c)^2-\left[(a+(b-c))^2-(2b-c)^2\right]=7b^2-a^2+c^2-6bc-2ab+2ac.$$

Vì

$$(5b-a-2c)^2-4\left(7b^2-a^2+c^2-6bc-2ab+2ac\right)=(b+2c-a)^2$$

nên

$$(2c+b-a)^2=(2n-3m)^2-4\left(n^2-4mn+2m^2\right)=m^2+4mn.$$

Suy ra

$$2c+b-a=\sqrt{m^2+4mn}.$$

Lấy tổng trường + khoát, trừ đi hiệu trường-khoát, chia đôi, được khoát pháp:

$$2(b-c)=\frac{(5b-a-2c)-(2c+b-a)}{2}=\frac{2n-3m-\sqrt{m^2+4mn}}{2}.$$

Lấy khoát chia đôi là hiệu cổ-câu:

$$b-c=\frac{2n-3m-\sqrt{m^2+4mn}}{4}.$$

Lấy tổng huyền +(cổ-câu), trừ đi hiệu cổ-câu, được cạnh huyền:

$$a=(a+(b-c))-(b-c)=n-\frac{2n-3m-\sqrt{m^2+4mn}}{4}=\frac{2n+3m+\sqrt{m^2+4mn}}{4}. \quad (2.2.12)$$

Lấy cạnh huyền trừ đi hiệu huyền-cổ, được cạnh cổ:

$$b=a-(a-b)=\frac{2n+3m+\sqrt{m^2+4mn}}{4}-m=\frac{2n-m+\sqrt{m^2+4mn}}{4}. \quad (2.2.13)$$

Lấy cạnh cổ trừ đi hiệu cổ–câu, là cạnh câu:

$$c=b-(b-c)=\frac{2n-m+\sqrt{m^2+4mn}}{4}-\frac{2n-3m-\sqrt{m^2+4mn}}{4}=\frac{m+\sqrt{m^2+4mn}}{2}. \quad (2.2.14)$$

Bài toán 30 (Ví dụ 2.2.9 - Trang 76). *Giả sử có hiệu huyền - cổ là 2 xích, có tổng (cổ - câu) + huyền, là 24 xích. Hỏi các cạnh câu, cổ, huyền là bao nhiêu?*

Lời giải (Trang 76 - 78). *Lấy tổng (cổ - câu) + huyền là 24 xích trừ đi hiệu huyền - cổ là 2 xích, được 22 xích, tức là tổng (cổ - câu) + cổ, bình phương, được 484 xích:*

$$\begin{aligned}&a-b=2, a+(b-c)=24\\&\Rightarrow 2b-c=(a+(b-c))-(a-b)=22 \Rightarrow (2b-c)^2=484\end{aligned}$$

Lại lấy tổng (cổ - câu) + huyền, 24 xích, bình phương, được 576 xích:

$$(a+(b-c))^2=24^2=576.$$

Lấy hai kết quả trên trừ cho nhau, được 92 xích:

$$(a+(b-c))^2-(2b-c)^2=576-484=92.$$

Lấy bình phương của tổng (cồ - câu) + cồ trừ đi 92, được 392 xích, là trường phương tích:

$$(2b-c)^2 - \left[(a+(b-c))^2 - (2b-c)^2\right] = 484 - 92 = 392.$$

Lấy tổng (cồ - câu)+cổ, 22 xích, nhân đôi, được 44 xích, trừ đi hiệu (huyền - cổ), 2 xích, còn 42 xích, là tổng trường + khoát:

$$5b - a - 2c = 2(2b-c) - (a-b) = 2 \times 22 - 2 = 42.$$

Dựa theo quy tắc, lấy 4 nhân trường phương tích, được 1568 xích, cùng với bình phương của (trường + khoát), là 1764 xích, trừ cho nhau, còn 196 xích, khai căn, được 14 xích, là hiệu trường - khoát:

$$(2b-c)^2 - \left[(a+(b-c))^2 - (2b-c)^2\right] = 7b^2 - a^2 + c^2 - 6bc - 2ab + 2ac.$$

Vì

$$(5b-a-2c)^2 - 4\left(7b^2 - a^2 + c^2 - 6bc - 2ab + 2ac\right) = (b+2c-a)^2$$

nên $(2c+b-a)^2 = 42^2 - 4 \times 392 = 196$. *Suy ra* $2c+b-a = 14$.
Lấy tổng trường + khoát 42 xích, trừ đi hiệu 14 xích, còn 28 xích, chia đôi, được 14 xích, là khoát. Lấy khoát 14 xích, chia đôi, được 7 xích, là hiệu cổ–câu:

$$b - c = \frac{\frac{(5b-a-2c)-(2c+b-a)}{2}}{2} = \frac{\frac{42-14}{2}}{2} = 7.$$

Lấy tổng (cổ-câu)+huyền, 24 xích, trừ đi hiệu (cổ—câu), 7 xích, còn 17 xích, là cạnh huyền:

$$a = (a+(b-c)) - (b-c) = 24 - 7 = 17.$$

Lấy cạnh huyền trừ đi hiệu huyền-cổ, 2 xích, còn 15 xích, là cạnh cổ:

$$a = a - (a-b) = 17 - 2 = 15$$

Lấy cạnh cồ trừ đi hiệu cồ-câu, 7 xích, còn 8 xích, là cạnh câu:

$$c = b - (b-c) = 15 - 7 = 8.$$

Nhận xét. *Có thể tính trực tiếp theo công thức (2.2.11)-(2.2.14) với* $a - b = m = 2, a + (b-c) = n = 24$ *như sau:*

$$a = \frac{2n+3m+\sqrt{m^2+4mn}}{4} = \frac{2\times 24 + 3\times 2 + \sqrt{2^2 + 4\times 2\times 24}}{4} = \frac{48+6+14}{4} = 17$$
$$b = \frac{2n-m+\sqrt{m^2+4mn}}{4} = \frac{2\times 24 - 2 + \sqrt{2^2 + 4\times 2\times 24}}{4} = \frac{48-2+14}{4} = 15$$
$$c = \frac{m+\sqrt{m^2+4mn}}{2} = \frac{2+14}{2} = 8$$

Nhận xét. *Nguyễn Hữu Thận đã nêu phương pháp trường phương tích giải hệ*

$$\begin{cases} a - b = m \\ a + (b - c) = n \\ a^2 = b^2 + c^2. \end{cases}$$

Tiểu kết. *Tiểu kết Nguyễn Hữu Thận đã giải 60 bài toán nhờ sử dụng Định lí Pythagoras. Một số bài toán đã có trong các sách toán Trung Hoa. Thí dụ, các bài toán cơ bản 2.1.1, 2.1.3, 2.1.5, 2.1.6 và các bài* $2.2.2, 2.2.3, 2.2.4, 2.2.5, 2.2.6$ *đã có trong Chương 9 của [1]. Rất có thể trong số 60 bài toán nêu trên đã có trong các sách Trung Hoa (xem [11, trang 294]). Tuy nhiên, công sức của Nguyễn Hữu Thận là đáng kể: Ông đã sắp xếp các bài toán theo thứ tự khó dần, cuối cùng là các bài toán khó (ngay cả với giáo viên và học sinh ngày nay). Dưới đây là bảng sắp xếp 60 bài toán đã trình bày ở trên.*

Bài số	Biết	Tìm	Bài số	Biết	Tìm
2.2.1	$c, a+b=m$	a, b	**2.2.31**	$a+b+c=m, a+b=n$	a, b, c
2.2.2	$b, a+c=m$	a, c	**2.2.32**	$a+c=m, a+b+c=n$	a, b, c
2.2.3	$c, a-b=m$	a, b	**2.2.33**	$a+b=m, a+(b-c)=n$	a, b, c
2.2.4	$b, a-c=m$	a, c	**2.2.34**	$a+c=m, a-(b-c)=n$	a, b, c
2.2.5	$a, b+c=m$	b, c	**2.2.35**	$a-b=m, (b+c)-a=n$	a, b, c
2.2.6	$a, b-c=m$	b, c	**2.2.36**	$a-c=m, (b+c)-a=n$	a, b, c
2.2.7	$a+c=m, a+b=n$	a, b, c	**2.2.37**	$a-c=m, a+(b-c)=n$	a, b, c
2.2.8	$c+b=m, c+a=n$	a, b, c	**2.2.38**	$a-b=m, a-(b-c)=n$	a, b, c
2.2.9	$c+b=m, b+a=n$	a, b, c	**2.2.39**	$b+c=m, (b+c)-a=n$	a, b, c
2.2.10	$a+b=m, a-c=n$	a, b, c	**2.2.40**	$b-c=m, a-(b-c)=n$	a, b, c
2.2.11	$a+b=m, b-c=n$	a, b, c	**2.2.41**	$b+c=m, a+b+c=n$	a, b, c
2.2.12	$a+c=m, a-b=n$	a, b, c	**2.2.42**	$b-c=m, a+(b-c)=n$	a, b, c
2.2.13	$a+c=m, b-c=n$	a, b, c	**2.2.43**	$(b+c)-a=m, a-(b-c)=n$	a, b, c
2.2.14	$b+c=m, a-b=n$	a, b, c	**2.2.44**	$b+c-a=m, a+(b-c)=n$	a, b, c
2.2.15	$b+c=m, a-c=n$	a, b, c	**2.2.45**	$a+b+c=m, a+(b-c)=n$	a, b, c
2.2.16	$a-c=m, a-b=n$	a, b, c	**2.2.46**	$a+b+c=m, a-(b-c)=n$	a, b, c
2.2.17	$b-c=m, a-b=n$	a, b, c	**2.2.47**	$a+(b-c)=m, a-(b-c)=n$	a, b, c
2.2.18	$b-c=m, a-c=n$	a, b, c	**2.2.48**	$a+b+c=m, (b+c)-a=n$	a, b, c
2.2.19	$a=m, a+b+c=n$	b, c	**2.2.49**	$b-c=m, a+b+c=n$	a, b, c
2.2.20	$a=m, a+(b-c)=n$	b, c	**2.2.50**	$a-c=n, a+b+c=m$	a, b, c
2.2.21	$a=m, (c+b)-a=n$	b, c	**2.2.51**	$a-b=n, a+b+c=m$	a, b, c
2.2.22	$a=m, a-(b-c)=n$	b, c	**2.2.52**	$b+c=m, a-(b-c)=n$	a, b, c
2.2.23	$b=m, a+b+c=n$	a, b	**2.2.53**	$b+c=m, a+(b-c)=n$	a, b, c
2.2.24	$b=m, a+(b-c)=n$	a, c	**2.2.54**	$a+c=m, (b+c)-a=n$	a, b, c
2.2.25	$b=m, (b+c)-a=n$	a, c	**2.2.55**	$a+c=m, a+(b-c)=n$	a, b, c
2.2.26	$b=m, a-(b-c)=n$	a, c	**2.2.56**	$a+b=m, (b+c)-a=n$	a, b, c
2.2.27	$c=m, a+b+c=n$	a, b	**2.2.57**	$a+b=m, a-(b-c)=n$	a, b, c
2.2.28	$c=m, a+(b-c)=n$	a, b	**2.2.58**	$b-c=m, (b+c)-a=n$	a, b, c
2.2.29	$c=m, (b+c)-a=n$	a, b	**2.2.59**	$a-c=m, a-(b-c)=n$	a, b, c
2.2.30	$c=m, a-(b-c)=n$	a, b	**2.2.60**	$a-b=m, a+(b-c)=n$	a, b, c

3. Một số vấn đề khác

Ngoài các bài toán cơ bản và 60 bài toán giải tam giác vuông đã nêu trong mục 2, trong [2], Nguyễn Hữu Thận còn trình bày một số bài toán khác liên quan đến tam giác vuông.

1. **Tam giác vuông đồng dạng:** Nguyễn Hữu Thận coi tam giác vuông Pythagoras $(3, 4, 5)$ là chính, gọi là chính câu cổ. Dựa vào chính câu cổ và sử dụng hệ số đồng dạng, Nguyễn Hữu Thận đã giải 13 bài toán về tam giác vuông đồng dạng. Chi tiết hơn xem [2], [5].

2. **Sử dụng định lí Pythagoras trong tính diện tích:** Định lí Pythagoras được Nguyễn Hữu Thận sử dụng để giải quyết các bài toán tính diện tích hình chữ nhật hoặc tam giác vuông nhờ giải hệ phương trình bậc hai bằng phương pháp Trường phrơng tích. Chi tiết đã được trình bày trong bài này và [8].

3. **Định lí Heron:** trong Ý Trai toán pháp nhất đắc lục Nguyễn Hữu Thận đã phát biểu và áp dụng Định lí Heron như hệ quả của Định lí Pythagoras (xem [6]).

4. **Tính gần đúng số** π Nguyễn Hữu Thận là một ngôi sao sáng trên bầu trời toán học Việt Nam. Ông là người Việt Nam đầu tiên biết tính gần đúng số Pi và $\sqrt{2}$ đến 8 chữ số. Thậm chí sau Ông cũng không ai đạt được trình độ này. Chi tiết hơn xem [7].

Kết luận. *Kết luận Trong Ý Trai toán pháp nhất đắc lục, Nguyễn Hữu Thận đã hướng dẫn sử dụng định lí Pythagoras khá chi tiết và tỉ mỉ, mang tính sư phạm cao. So với [1] thì nội dung phần này trong [2] chi tiết hơn, thậm chí vượt trội hơn cả so với các sách toán Hán Nôm viết sau [2] (xem, thí dụ [3]).*
Ngoài ra, Ông còn sử dụng định lí Pythagoras trong phát biểu và áp dụng Định lí Heron, trong các bài toán tính diện tích, tính các yếu tố trong tam giác nhờ chính câu cổ và tỉ số đồng dạng, và tính gần đúng số Pi đến 8 chữ số. Những dạng toán này được trình bày trong các bài báo [5], [7], [8].
Nhà toán học Ý Trai Nguyễn Hữu Thận và cuốn sách Ý Trai toán pháp nhất đắc lục đã được sơ lược giới thiệu trong [9]. Văn bản và nội dung Ý Trai toán pháp nhất đắc lục đã được phân tích trong [10].

Tài liệu

[1] Liu Hui, 九章算术 Círu chương toán thuật (viết năm 263). Bản dịch và bình chú tiếng Anh: The Nine Chapters On the Mathematical Art: Companion And Commentary From Brand, Oxford University Press, USA, 2000; Bản dịch và bình chú tiếng Nga của E. I. Berezina, trong: Nghiên círu lịch sủ toán học, Tập X, Nhà xuất bản Quốc gia sách Lí thuyết-Kĩ thuật, Moscow, 1957, trang 423584.

[2] 阮有慎 Nguyễn Hữu Thận, 意算法一得 Ý Trai toán pháp nhất đắc lục (hoàn thành năm 1829), Thư viện Viện nghiên cứu Hán Nôm: A.1336; VHv.1184; A. 982; A.1336/a. Đoàn Thị Lệ và Cung Thị Kim Thành dịch A.1336 và A.982 năm 2017.

[3] 阮瑾 Nguyễn Cẩn, 算指南 Bút toán chỉ nam, Hà Nội, 1909), Thư viện Viện nghiên cứu Hán Nôm: A. 1031 .

[4] Euclid, Cơ sở của Hình học, Nhà xuất bản Trí thức, 2016.

[5] Đoàn Thị Lệ, Lê Thị Nhàn, Tạ Duy Phượng, Cung Thị Kim Thành, Phan Ánh Tuyết, Chính câu cổ trong cuốn sách Ý Trai toán pháp nhất đắc lục, Tạp chí Toán Tuổi thơ 2, số 224+225 (tháng 11-2021), trang 54-57.

[6] Đoàn Thị Lệ, Tạ Duy Phượng, Cung Thị Kim Thành, Phan Ánh Tuyết, Mai Văn Thu, Định lí Heron trong Ý Trai toán pháp nhất đắc lục, Tạp chí Pi, Tập 5, số 11 (tháng 11-2021), trang 48-53.

[7] Đoàn Thị Lệ, Tạ Duy Phượng, Cung Thị Kim Thành, Phan Ánh Tuyết, Mai Văn Thu, Số Pi trong các sách toán Hán Nôm, 6 trang (Bản thảo).

[8] Đoàn Thị Lệ, Tạ Duy Phượng, Cung Thị Kim Thành, Phan Ánh Tuyết, Mai Văn Thu, Phương pháp Trường phrơng tích giải các bài toán diện tích trong Ý Trai toán pháp nhất đắc lục, 6 trang (Bản thảo đã hoàn thành).

[9] Tạ Duy Phượng, Đoàn Thị Lệ, Cung Thị Kim Thành, Phan Ánh Tuyết, Đôi nét về nhà toán học Việt Nam đầu thế kỉ XIX Ý Trai Nguyễn Hĩu Thận và cuốn sách Ý Trai toán pháp nhất đắc lục của Ông, Tạp chí Toán học và Tuổi trẻe, Số 481 (7/2017), trang 39-42.

[10] [10] Tạ Duy Phượng, Lê Thị Nhàn, Đoàn Thị Lệ, Cung Thị Kim Thành, Phan Ánh Tuyết, Về văn bản và nội dung cuốn sách toán Ý trai toán pháp nhất đắc lục 意算法一得 của Nguyễn Hu Thận, in trong Thông báo Hán Nôm học 2016, Nhà xuất bản Thế giới, Hà Nội, 2017, trang 456-466.

[11] Jean-Claude Marzloff, History of Chinese Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1997, 2006.

[12] Uta C. Merzbach and Carl B. Boyer, A History of Mathematics, Third edition, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2011.

Giải Một Số Bài Toán Hình Học Phẳng Nhờ Phép Quay Trong Geogebra

Nguyễn Hoàng Vũ (Viện Sinh thái môi trường Đông Dương, Hà Nội)
Vũ Thị Thu Hà (Trường Trung học Phổ thông Phạm Hồng Thái, Hà Nội)
Chu Thị Minh Châu (Trường Trung học Phổ thông Quang Trung, Hà Nội)
Tạ Duy Phượng (Cộng tác viên Viện Toán học)
Phạm Văn Hoằng, Trần Lê Thủy (Đại học Giáo dục, Đại học Quốc gia Hà Nội)

1. Đặt vấn đề

Các phép biến hình có vai trò quan trọng trong dạy và học toán. Nó chiếm một thời lượng đáng kể trong chương trình toán phổ thông chuyên. Bài viết này minh họa cách sử dụng GeoGebra trong giải toán hình học phẳng nhờ phép quay. Các ví dụ được lấy chủ yếu từ tài liệu [10] và các tài liệu thi Olympic.

2. Một số tính chất cơ bản của phép quay

Định nghĩa 1. *Phép quay tâm O (hay quanh tâm O) một góc α là phép biến hình trên mặt phẳng biến điểm X thành điểm X' sao cho*

(a) $OX' = OX$.

(b) Góc quay từ vectơ $\overrightarrow{OX}$ tới vectơ $\overrightarrow{OX'}$ bằng α.

Phép quay quanh tâm O một góc α thường được kí hiệu là R_O^α (rotation) hoặc Q_α^O (quay).

Tính chất 1. *Phép quay biến đường tròn thành đường tròn.*

Định nghĩa 2. *Tích của hai phép biến hình G và F được kí hiệu là $F \circ G$, được hiểu là*

$$(F \circ G)(X) = F(G(X)).$$

Tính chất 2. *Tích của hai phép quay R_B^{β} và R_A^{α} với $\alpha + \beta \neq k360^\circ$ là một phép quay $R_C^{\gamma} := R_B^{\beta} \circ R_A^{\alpha}$, với $\gamma = \alpha + \beta$ và $\angle BAC = \frac{\alpha}{2}$, $\angle ABC = \frac{\beta}{2}$.*

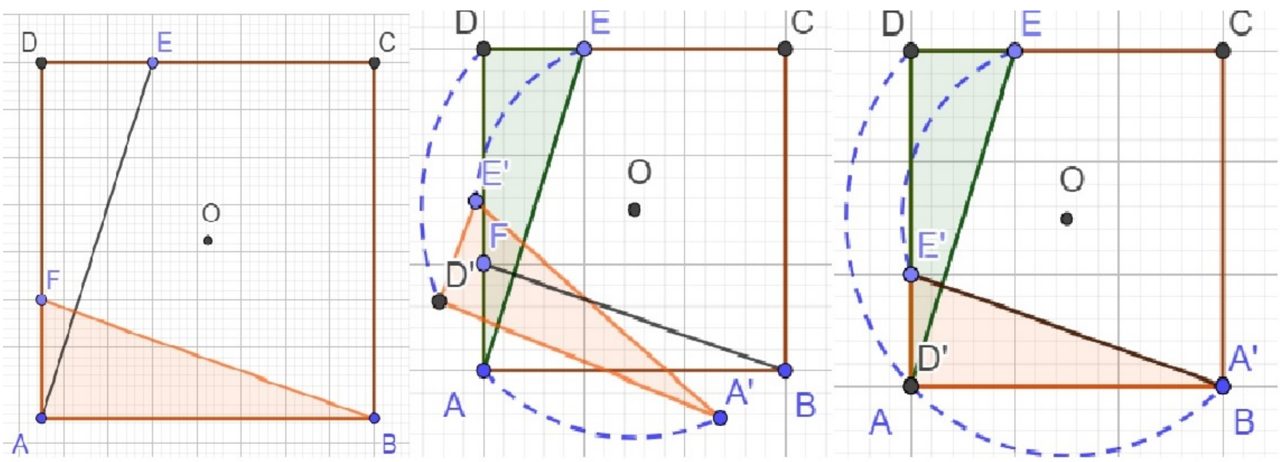
Chú ý. Trong mỗi bài toán, chúng tôi thường trích xuất ba hình từ GeoGebra

- Hình thứ nhất bên trái, kí hiệu là Hình a), là đề bài.
- Hình thứ hai ở giữa, kí hiệu là Hình b) là hình trung gian (đang thực hiện phép quay).
- Hình thứ ba bên phải, kí hiệu là Hình c) là hình cuối cùng (kết quả của phép quay).

Bạn đọc có thể tự mình vẽ và thực hiện phép quay trên giấy hoặc trên GeoGebra hoặc tham khảo các files .ggb (file GeoGebra) trên trang web của: https://www.geogebra.org/m/vaxnmyfq

3. Một số bài toán sử dụng phép quay và GeoGebra

Bài toán 1. *Trên các cạnh CD và DA của hình vuông $ABCD$ lần lượt chọn các điểm E và F sao cho $DE = AF$. Chứng minh rằng hai đường thẳng AE và BF vuông góc với nhau.*

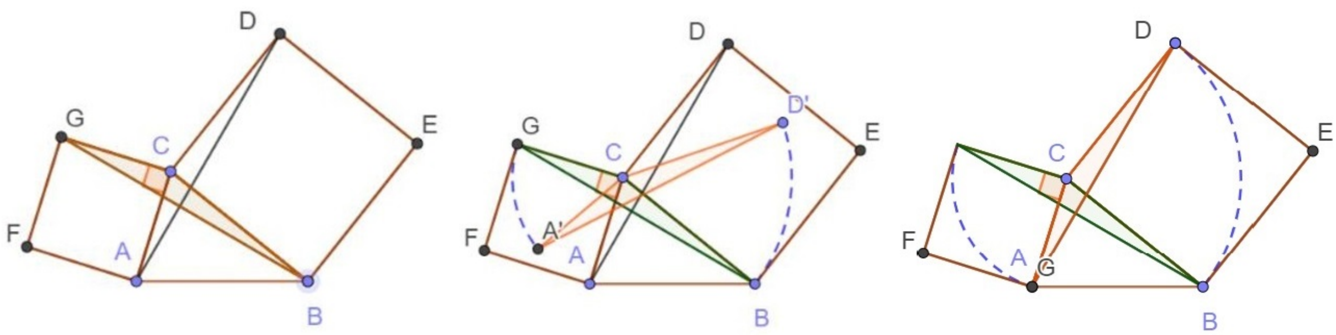


Hình 1

Lời giải. Gọi O là tâm hình vuông. Quay hình vuông quanh điểm O một góc 90° ngược kim đồng hồ. Khi ấy các điểm A, B, C, D biến thành các điểm B, C, D, A (Hình 1b và Hình 1c). Vì $DE = AF$ nên E trùng với F hay AE là ảnh của BF sau phép quay góc 90° ngược kim đồng hồ. Vậy BF vuông góc với AE.

Thay đổi điểm E và điểm F trên CD và DA sao cho ta vẫn có $DE = AF$. Và thực hiện lại thao tác phép quay, ta vẫn có BF vuông góc với AE. □

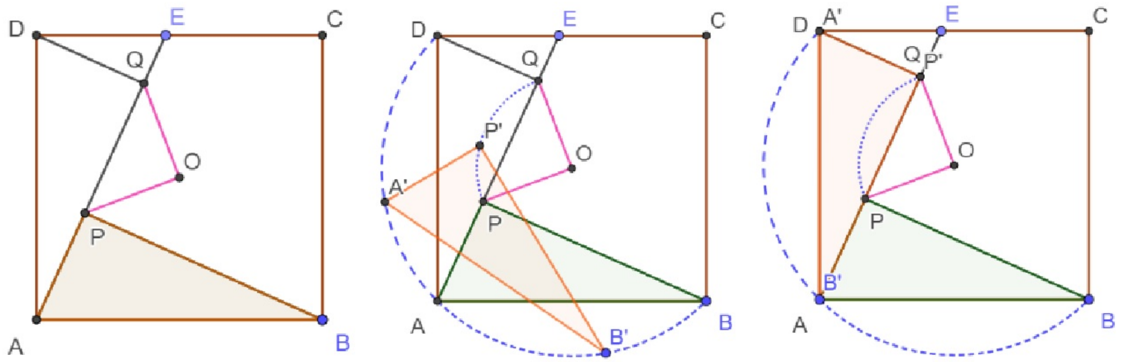
Bài toán 2. *Trên các cạnh BC và AC của tam giác ABC dựng ra phía ngoài của tam giác hai hình vuông $BCDE$ và $ACGF$. Chứng minh rằng các đoạn thẳng AD và BG bằng nhau và vuông góc với nhau.*



Hình 2

Lời giải. Quay tam giác GBC quanh điểm C một góc 90° ngược kim đồng hồ. Điểm G biến thành điểm A, điểm B biến thành điểm D. Cạnh CG trở thành cạnh CA, cạnh CB trở thành cạnh CD, đoạn GB trở thành đoạn AD. Vậy hai đường AD và BG vuông góc với nhau. □

Bài toán 3. *Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$ và E là điểm bất kì trên đoạn thẳng CD. Các điểm P và Q là hình chiếu vuông góc của B và D lên đường thẳng AE. Chứng minh rằng tam giác POQ là tam giác vuông cân.*

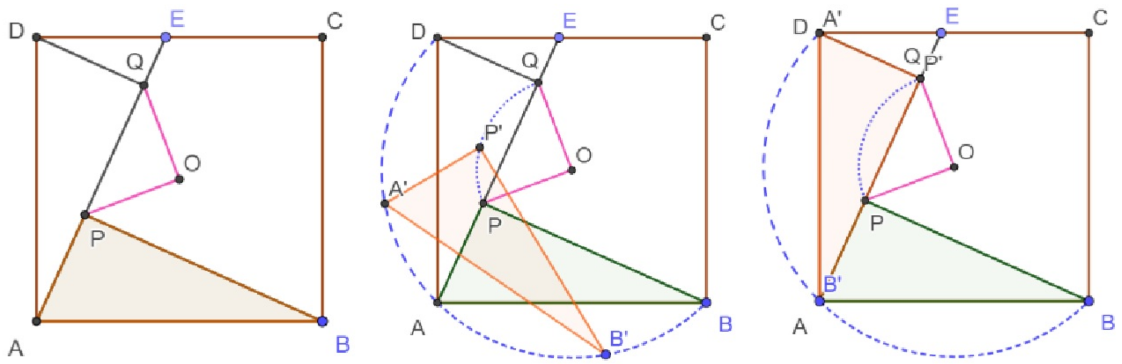


Hình 3

Lời giải. Quay tam giác APB quanh điểm O một góc 90° cùng chiều kim đồng hồ. Điểm A trở thành điểm D, điểm B trở thành điểm A, cạnh BA trở thành cạnh AD, điểm P trở thành điểm Q. Suy ra $OP = OQ$. Vì phép quay góc 90° nên tam giác POQ là tam giác vuông cân tại $.O$

Thay đổi vị trí điểm E trên CD. Thực hiện lại thao tác quay, ta vẫn có POQ là tam giác vuông cân tại O. □

Bài toán 4. *Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$ và E là điểm bất kì trên đoạn thẳng CD. Các điểm P và Q là hình chiếu vuông góc của B và D lên đường thẳng AE. Chứng minh rằng tam giác POQ là tam giác vuông cân.*



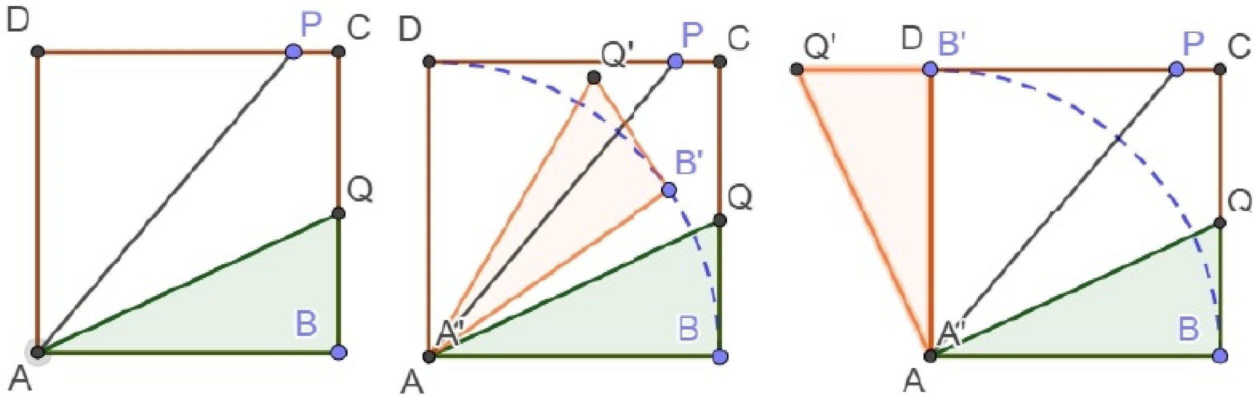
Hình 4

Lời giải. Quay tam giác APB quanh điểm O một góc 90° cùng chiều kim đồng hồ. Điểm A trở thành điểm D, điểm B trở thành điểm A, cạnh BA trở thành cạnh AD, điểm P trở thành điểm Q. Suy ra $OP = OQ$. Vì phép quay góc 90° nên tam giác POQ là tam giác vuông cân tại O.

Thay đổi vị trí điểm E trên CD. Thực hiện lại thao tác quay, ta vẫn có POQ là tam giác vuông cân tại O.

□

Bài toán 5. *Điểm P nằm trên cạnh CD của hình vuông $ABCD$. Phân giác của góc BAP cắt cạnh BC tại Q. Chứng minh rằng $BQ + DP = AP$.*



Hình 5

Lời giải. Quay tam giác AQB quanh điểm A một góc $90°$ ngược chiều kim đồng hồ (Hình 4b và Hình 4c). Điểm B trở thành điểm D, cạnh AB trở thành cạnh AD, điểm Q trở thành điểm Q' nằm trên tia đối của DC. Do AQ là phân giác của $\angle BAP$ nên

$$\angle PQ'A = 90° - \angle DAQ' = \angle DAP + \angle PAB - \angle DAQ' = \angle DAP + \angle DAQ' = \angle PAQ',$$

hay tam giác $Q'PA$ cân đỉnh P. Chứng tỏ

$$BQ + DP = DQ' + DP = PQ' = AP.$$

Thay đổi vị trí điểm P trên CD. Thực hiện lại thao tác quay, ta vẫn có $BQ + DP = AP$. □

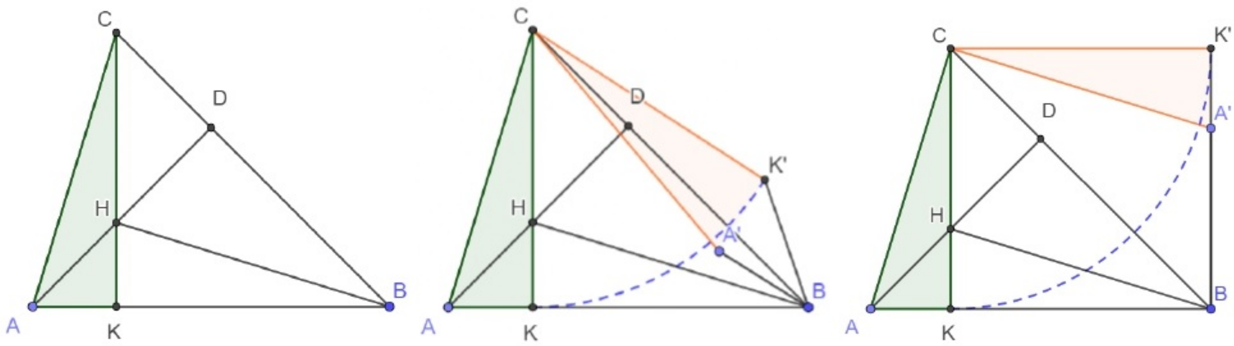
Nhận xét. Tất nhiên, có thể giải bài này mà không dùng ngôn ngữ phép quay: Trên tia đối của DC dựng $DQ' = BQ$. Hai tam giác ADQ' và ABQ bằng nhau (hai tam giác vuông có hai cặp cạnh góc vuông tương ứng bằng nhau). Suy ra

$$\measuredangle PQ'A = 90° - \angle DAQ' = (\angle PAD + 2\angle BAQ) - \angle DAQ' = \angle PAD + \angle DAQ' = \angle PAQ'.$$

Chứng tỏ tam giác APQ' cân đỉnh P. Vậy

$$AP = PQ' = DP + DQ' = BQ + DP.$$

Tuy nhiên, ý tưởng "*quay*" có vẻ tự nhiên hơn ý tưởng trên tia đối của DC đặt $DQ' = BQ$.



Hình 6

Bài toán 6. *Cho tam giác nhọn ABC với $\angle ABC = 45°$. Các đường cao hạ từ đỉnh A và C gặp nhau tại H. Chứng minh rằng $BH = CA$.*

Lời giải. Quay tam giác CKA quanh điểm C một góc $90°$ ngược kim đồng hồ. Đoạn CK trở thành đoạn CK' vuông góc với CK, điểm A trở thành điểm A'. Đoạn CA trở thành đoạn CA' vuông góc với CA. Do $\angle ABC = 45°$ nên $CK' = CK = BK$ và $\angle CKB = \angle KCK' = 90°$ nên $CKBK'$ là hình vuông. Do $\angle K'CA' = \angle KCA = \angle HBK$ nên $\angle A'CB = \angle HBC$. Do đó $CA' // BH$ và $CKBA'$ là hình bình hành. Suy ra $BH = CA' = CA$. □

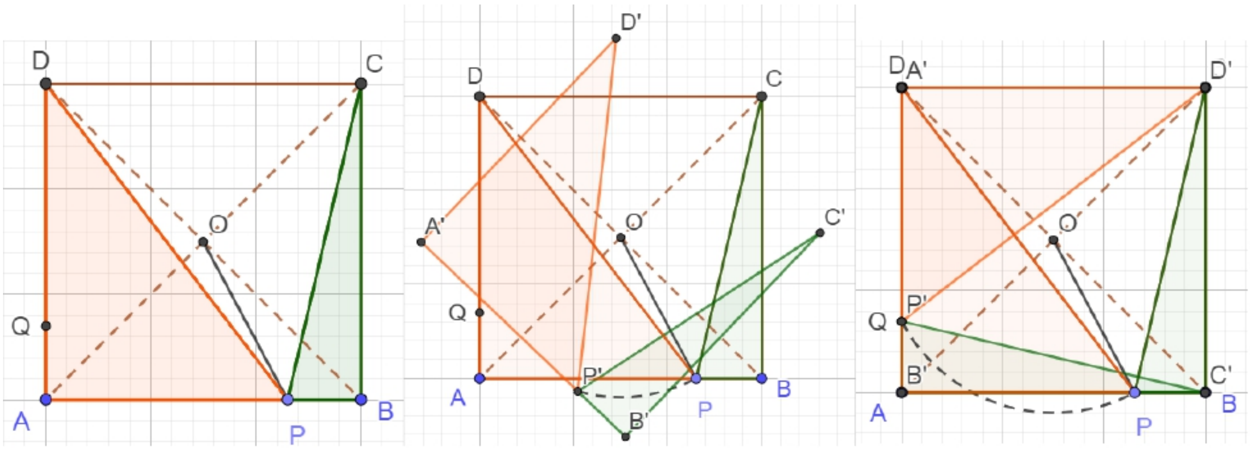
Nhận xét 1. Có thể chứng minh trực tiếp không dùng phép quay như sau: Do $\angle ABC = 45°$ nên CKB là tam giác vuông cân hay $CK = BK$. Mặt khác, $\angle ACK = \angle HBK$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc). Chứng tỏ $\Delta ACK = \Delta HBK$. Do đó $CA = BH$.

Nhận xét 2. Ta có $\angle ABC = 45°$ khi và chỉ khi $CA = BH$. Thật vậy, nếu $CA = BH$ thì $\Delta CAK = \Delta BHK$. Suy ra $CK = BK$ hay CKB là tam giác vuông cân. Do đó $\angle ABC = \angle KBC = 45°$.

Bài toán 7. *Trên các cạnh AB và AD của hình vuông $ABCD$ lần lượt chọn các điểm P và Q sao cho $AP = DQ$. Chứng minh rằng $\angle PBQ + \angle PCQ + \angle PDQ = 90°$.*

Lời giải. Quay tam giác DAP và tam giác CBP quanh điểm O góc $90°$ cùng chiều kim đồng hồ (Hình 6b và Hình 6c). Điểm D biến thành điểm C, điểm A biến thành điểm D, điểm B biến thành điểm A, điểm C biến thành điểm B. Góc ADP trở thành góc DCQ và góc PCB trở thành góc QBA. Suy ra

$$\angle PBQ + \angle PCQ + \angle PDQ = \angle ABQ + \angle PCQ + \angle PDA$$

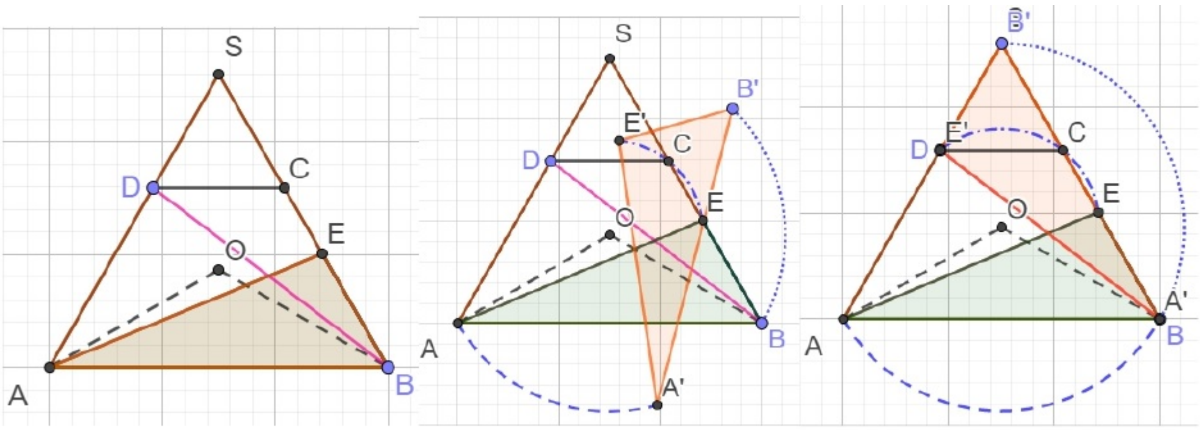


Hình 7

$$= \angle BCP + \angle PCQ + \angle QCD = \angle BCD = 90^\circ.$$

Thay đổi vị trí điểm P và Q trên AB và AD sao cho $AP = DQ$. Thực hiện lại thao tác quay, ta vẫn có $\angle PBQ + \angle PCQ + \angle PDQ = 90^\circ$. □

Bài toán 8. *Cho hình thang $ABCD$ với các cạnh đáy AB và CD thỏa mãn điều kiện: $\angle BAD = \angle ABC = 60^\circ$ và $CD < BC$. Trên cạnh BC lấy điểm E sao cho $BE = CD$. Chứng minh rằng $AE = BD$ và góc giữa chúng bằng 60°.*



Hình 8

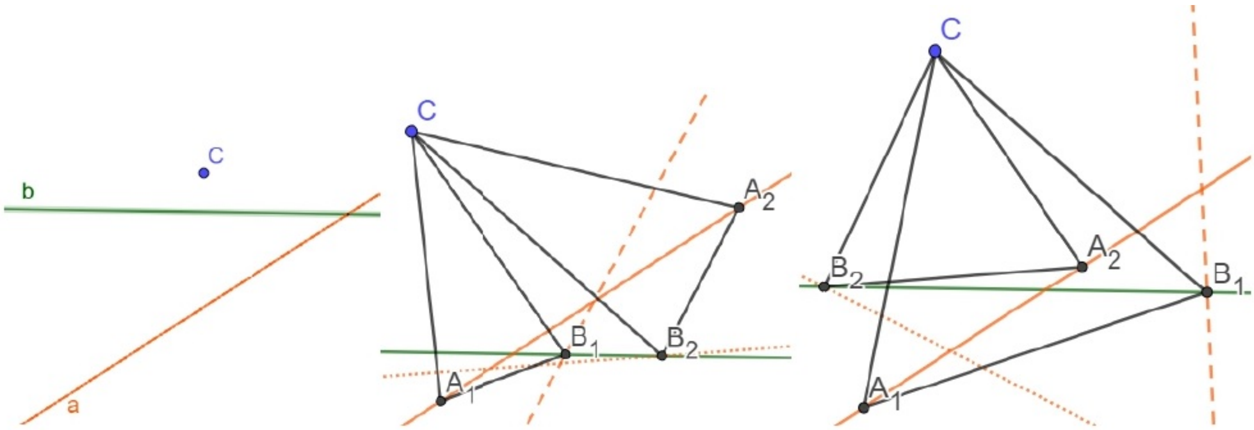
Lời giải. Kéo dài AD và BC cắt nhau tại S. Vì $\angle BAD = \angle ABC = 60^\circ$ nên SAB là tam giác đều. Gọi O là tâm tam giác SAB. Khi ấy $\angle AOB = \angle BOS = \angle SOA = 120^\circ$. Do $AB // CD$ nên SDC cũng là tam giác đều. Do đó $SD = CD = BE$. Quay tam giác ABE quanh điểm O một góc 120° ngược kim đồng hồ.

Qua phép quay này thì điểm A biến thành điểm B, điểm B biến thành điểm S và điểm E biến thành điểm D. Như vậy đoạn BD là ảnh của đoạn AB qua phép quay $120°$. Vậy $AE = BD$ và góc tù giữa chúng bằng $120°$ hay góc nhọn giữa chúng bằng $60°$.

Thay đổi vị trí điểm D và điểm C sao cho $ABCD$ vẫn là hình thang cân có góc ở đáy bằng $60°$. Thực hiện lại thao tác quay, ta vẫn có $AE = BD$ và góc giữa chúng bằng $60°$. □

Phép quay cũng có thể giúp giải các bài toán dựng hình như minh họa trong bài tập dưới đây.

Bài toán 9. *Cho hai đường thẳng a và b cắt nhau và một điểm C không thuộc hai đường thẳng này. Hãy dựng hai điểm A và B tương ứng trên a và b sao cho ABC là tam giác đều.*



Hình 9

Lời giải. Gọi A là một điểm bất kì trên đường thẳng a. Để tìm điểm B trên b sao cho ABC là tam giác đều, ta cần quay a quanh điểm C góc $60°$ cùng chiều hoặc ngược chiều kim đồng hồ. Gọi a_1 và a_2 lần lượt là ảnh của a qua phép quay quanh điểm C góc $60°$.

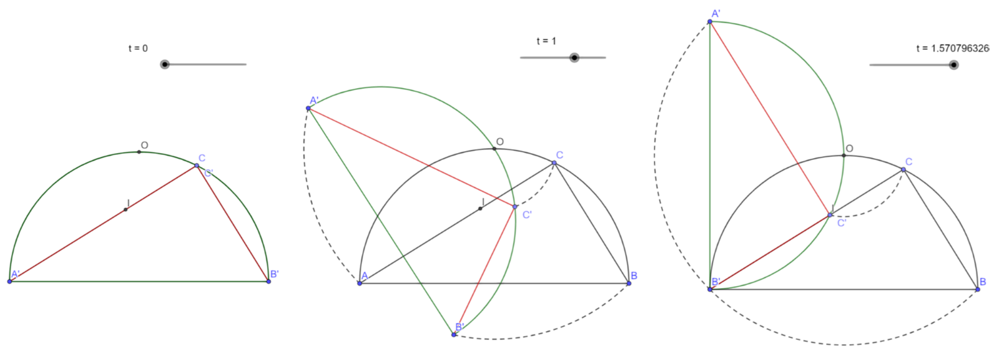
Khi A chạy trên đường thẳng a, ảnh của A qua phép quay góc $60°$ chạy trên đường thẳng a_1 và a_2. Ảnh của điểm A cần tìm chính là điểm B, là giao điểm của a_1 (hoặc a_2) với đường thẳng b.

Như vậy, để dựng tam giác đều ABC ta quay đường thẳng a góc $60°$ quanh điểm C theo cả hai hướng (cùng chiều và ngược chiều kim đồng hồ), được đường thẳng a_1 và a_2. Gọi B_1 và B_2 là giao điểm của đường thẳng a_1 và a_2 với đường thẳng b. Để xác định các điểm A_1 và A_2 ta chỉ cần quay điểm B_1 và B_2 góc $60°$ quanh điểm C lần lượt ngược chiều và cùng chiều kim đồng hồ. Bài toán nói chung có hai nghiệm. □

Biện luận. Nếu một trong hai đường thẳng a_1 hoặc a_2 trùng với đường thẳng b thì bài toán sẽ có vô số lời giải. Nếu một trong hai đường thẳng a_1 hoặc a_2 song song với đường thẳng b thì bài toán sẽ có duy nhất một lời giải.

Có thể dùng phép quay để giải các bài toán qũi tích như minh họa trong bài tập dưới đây.

Bài toán 10. *Cho nửa đường tròn đường kính AB. Điểm C chuyển động trên nửa đường tròn. Tìm tập hợp các điểm I trên tia AC sao cho $AI = BC$.*



Hình 10

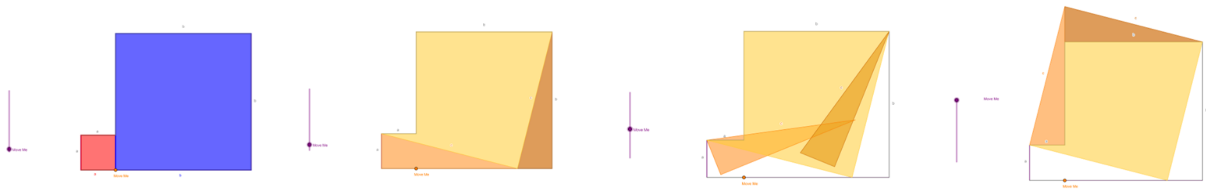
Lời giải. Giả sử O là điểm chính giữa cung AB. Phép quay tâm O góc 90° theo chiều kim đồng hồ biến điểm B thành điểm A, điểm A biến thành điểm A_1 mà $AA_1 \perp AB$ và $AA_1 = AB$, điểm C biến thành điểm I, đoạn thẳng BC thành đoạn AI, đoạn AC thành A_1I. Suy ra $\angle AIA_1 = \angle BCA = 90°$. Ảnh của nửa đường tròn đường kính AB chính là đường tròn đường kính AA_1. Suy ra khi C di động trên nửa đường tròn đương kính AB thì I di động trên nửa đường tròn đường kính AA_1. □

4. Chứng minh định lí Pythagoras nhờ phép quay

Có khoảng 400 chứng minh định lí Pythagoras, trong đó có một số chứng minh nhờ phép quay. Các chứng minh này dễ dàng minh họa trên GeoGebra.

Định lý 1. *(Định lý Pythagoras) Cho tam giác ABC vuông ở C có các cạnh tương ứng là a, b, c. Khi ấy $c^2 = a^2 + b^2$.*

Chứng minh 1. (Thabit Ibn Qurra, 836 – 901) Đầu tiên vẽ hai hình vuông cạnh a và b. Tổng diện tích hai hình vuông bằng $a^2 + b^2$. Vẽ hai tam giác vuông ABC và ADE. Quay tam giác



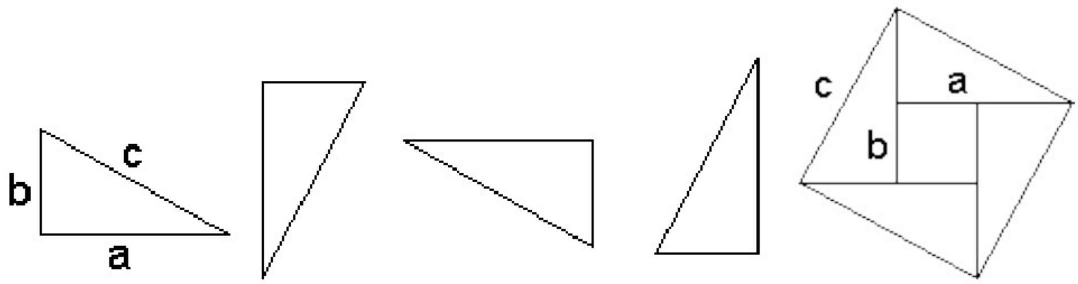
Hình 11

ABC và ADE góc 90^o ngược chiều kim đồng hồ quanh tâmB và tâm E tương ứng, được ảnh là tam giác BCA' và tam giác $ED'A'$. Như vậy, hai hình vuông có tổng diện tích $a^2 + b^2$. đã được biến đổi thành hình vuông có diện tích c^2 hay $c^2 = a^2 + b^2$.

Có thể thay đổi vị trí điểm A, thí dụ, để được tam giác ABC mới với $a > b$. Ta vẫn luôn luôn có $c^2 = a^2 + b^2$. □

Có thể kết hợp phép quay và phép tịnh tiến để chứng minh định lí Pythagoras như dưới đây.

Chứng minh 2. Quay tam giác ABC (diện tích $\frac{1}{2}ab$) góc 90°, 180°, 270°.



Hình 12

Sắp xếp lại (tịnh tiến) bốn tam giác vuông. Ta được một hình vuông cạnh c bằng một hình vuông cạnh $a - b$ và bốn hình tam giác vuông cạnh a và b. Ta có

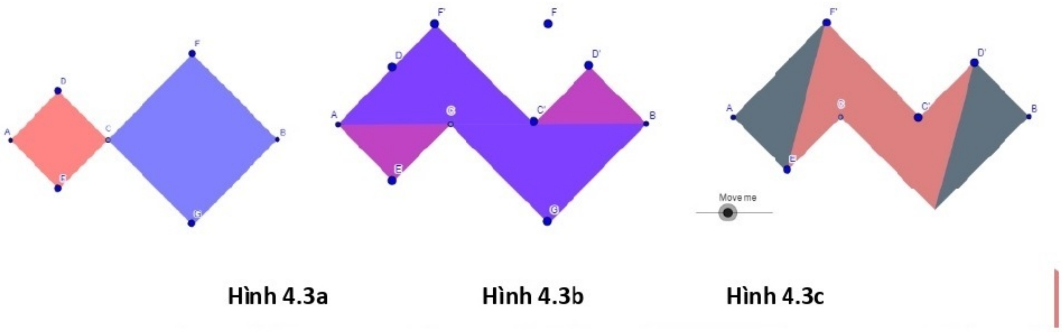
$$c^2 = (a - b)^2 + 4 \cdot \frac{ab}{2} = a^2 - 2ab + b^2 + 2ab = a^2 + b^2.$$

□

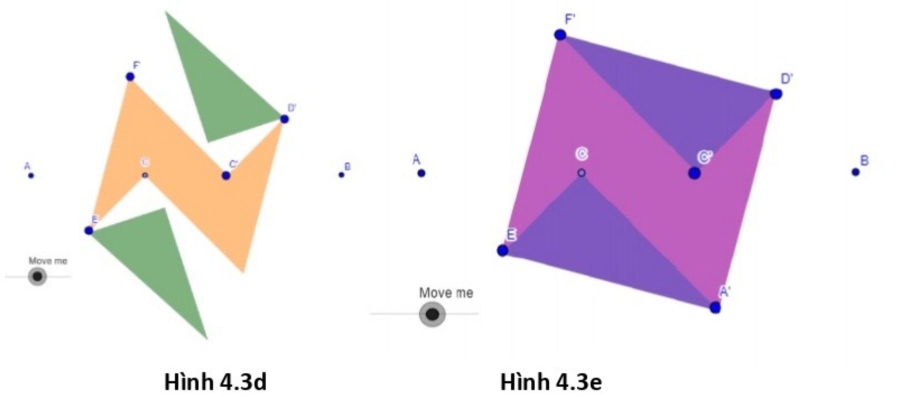
Chứng minh 2. Dựng hai hình vuông $AECD$ cạnh a và $CGBF$ cạnh b. Tịnh tiến hai tam giác ACF và CBF dọc theo đường AB để được hai tam giác $C'BD'$ và $AC'F'$

$$c^2 = (a - b)^2 + 4 \cdot \frac{ab}{2} = a^2 - 2ab + b^2 + 2ab = a^2 + b^2.$$

Trong hình đánh dấu hai tam giác $AF'E$ và BGD'



Hình 13



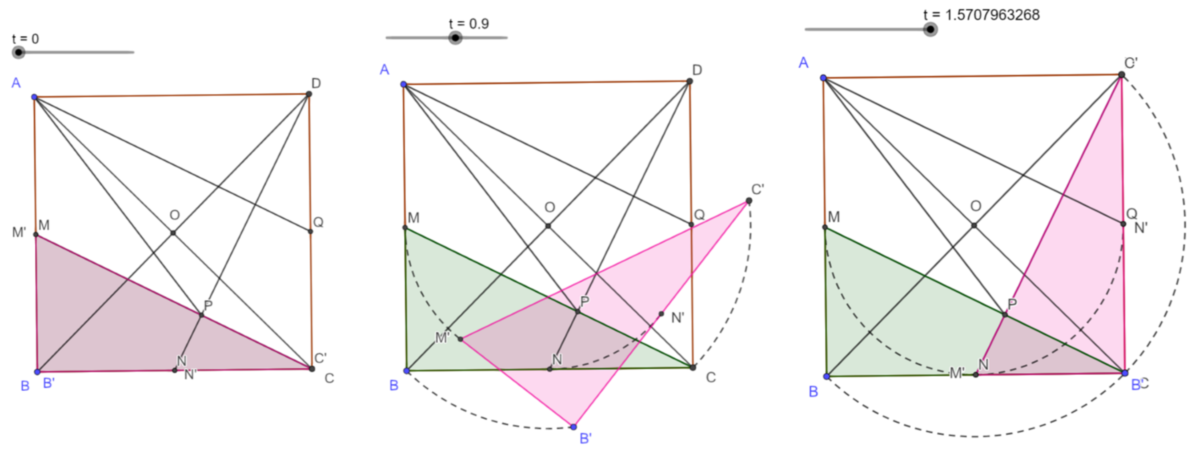
Hình 14

Quay tam giác $AF'E$ quanh điểm E và tam giác BGD' quanh điểm D' góc $90°$ ngược kim đồng hồ để được tam giác $A'FE$ và tam giác $D'CF$.

Ta có Hình 4.3d và Hình 4.3e, chính là hình vuông cạnh c. Như vậy, ta có $c^2 = a^2 + b^2$. □

5. Một số bài tập sử dụng phép quay và GeoGebra

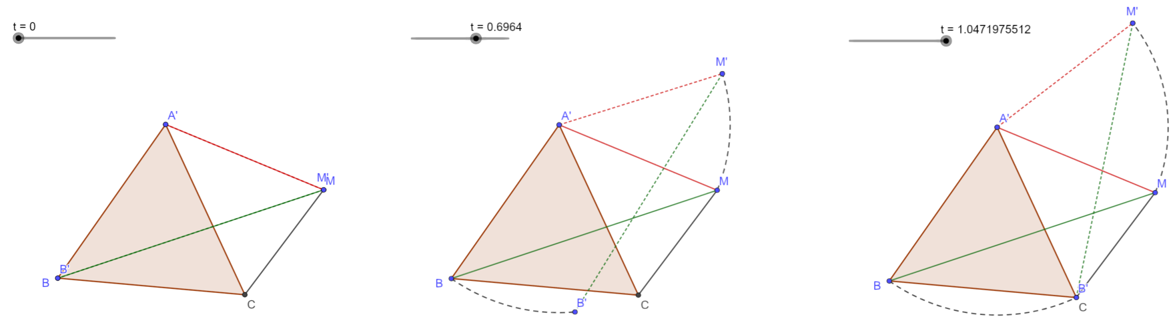
Bài tập 1. Các điểm M và N là các trung điểm của các cạnh AB và BC của hình vuông $ABCD$. Các đoạn DN và CM cắt nhau tại P. Chứng minh rằng đoạn PA bằng cạnh hình vuông.



Hình 15

Lời giải. Dùng phép quay tâm O góc quay $90°$ ngược chiều kim đồng hồ, khi đó A, B, C, D tương ứng biến thành B, C, D, A. M biến thành N, N biến thành Q (điểm giữa đoạn CD). Đoạn MC biến thành ND, do đó $MC \perp ND$. Đoạn ND biến thành QA nên $ND \perp AQ$ và vì vậy $AQ // CM$. Giả sử H là giao điểm của đoạn AQ và DP. Khi ấy do Q là điểm giữa đoạn DC nên H là điểm giữa đoạn DP. Đoạn AH vừa là đường cao vừa là đường trung tuyến của tam giác APD nên tam giác APD cân và do đó $AP = AD$. □

Bài tập 2. Cho tam giác đều ABC. M là một điểm tùy ý trên mặt phẳng. Chứng minh rằng độ dài một đoạn bất kì trong ba đoạn MA, MB, MC không lớn hơn tổng hai đoạn còn lại. Khi nào thì xảy ra dấu bằng?



Hình 16

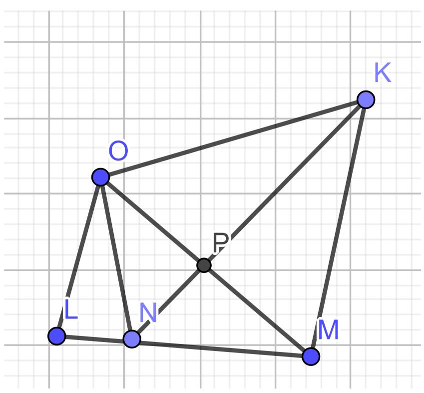
Lời giải. Cố định MC và thay các đoạn thẳng MA, MB bởi các đoạn thẳng là ảnh của chúng qua phép quay tâm A góc quay $60°$. Khi ấy điểm M biến thành điểm M', B biến thành C, BM biến thành CM'.

Tam giác AMM' đều, suy ra $MM' = AM$. Từ tam giác MCM' ta có $MC + CM' > MM'$ hay $MB + MC > MA$. Tương tự, $BM + MA > MC$, $MC + MA > MB$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi M', C, M thẳng hàng. Lúc đó $\angle AMC = \angle AM'C = 60°$ hay M thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. □

6. Một số bài toán thi Olympic sử dụng phép quay có thể minh họa trên GeoGebra

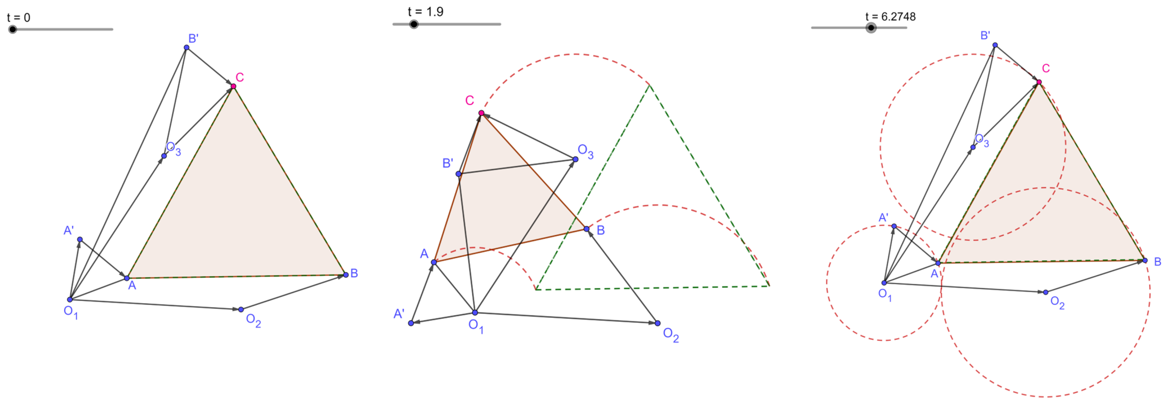
Bài toán 11 (Olympic Lomonosov, Nga, 2014). *Tam giác LOM với góc $\angle LOM = \alpha$ được quay quanh O một góc nhọn. Điểm L biến thành điểm N nằm trên đường LM, điểm M biến thành điểm K sao cho $OM \perp NK$. Tìm số đo góc quay.*



Hình 17

Lời giải. Kí hiệu góc quay là ϕ. Khi ấy $\angle LON = \angle MOK = \phi$. Vì $ON = OL$ (tính chất của phép quay) nên $\angle OLN = \angle ONL = 90^\circ - \phi/2$. Do hai tam giác LOM và NOK bằng nhau (tính chất của phép quay) nên $\angle ONK = \angle OLN = 90^\circ - \phi/2$. Theo giả thiết, $OM \perp NK$ nên $\angle NOP = 90^\circ - \angle ONK = \phi/2$. Hay $\alpha = 3\phi/2$, nghĩa là $\phi = 2\alpha/3$. □

Bài toán 12 (Olympic toàn Nga, 1961). *Hai điểm A và B chuyển động đều với vận tốc góc bằng nhau theo đường tròn tâm O_1 và O_2 tương ứng (theo chiều kim đồng hồ). Chứng minh rằng đỉnh C của tam giác đều ABC cũng chuyển động đều trên đường tròn nào đó.*



Hình 18

Lời giải. Giả sử vectơ O_1O_3 là ảnh của vectơ O_1O_2 một góc 60° theo hướng cùng hướng với hướng của AB thành AC. Các điểm A' và B' là ảnh của A và B qua phép quay quanh điểm O_1. Khi quay đều của các vectơ O_1A và O_2B với cùng vận tốc góc thì tam giác $O_1A'A$ quanh điểm O_1, các vectơ O_3B' và $B'C = A'A$, nghĩa là tổng của chúng O_3C quay quanh O_3. □

7. Bài tập rèn luyện

Bài tập 3. Cho tam giác đều ABC nội tiếp trong đường tròn. M là một điểm tùy ý trên cung BC đối diện đỉnh A. Chứng minh rằng $BM + MC = MA$.

Bài tập 4. Dựng về phía ngoài của $\triangle ABC$ các tam giác đều $A'BC$, $AB'C$, ABC'. Chứng minh rằng $AA' = BB' = CC'$ và các đường thẳng AA', BB', CC' cắt nhau tại một điểm.

Bài tập 5. Cho ba điểm A, B, C thẳng hàng (B nằm giữa A và C). Dựng các tam giác đều ABE, BCF nằm trên cùng một nửa mặt phẳng có bờ là AC. M, N tương ứng là trung điểm của AF và CE. Chứng minh rằng BMN là tam giác đều.

Bài tập 6 (Thi vào 10 PTTH chuyên Đại học Quốc gia Hà Nội, 1993). Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn tâm O bán kinh R. Quay tam giác ABC góc $90°$ quanh tâm O được tam giác $A_1B_1C_1$. Tính diện tích phần chung của hai tam giác ABC và $A_1B_1C_1$ theo R.

Bài tập 7 (Tạp chí Komal, B. 3387, 2000). Hãy xác định góc α, lbiết rằng với một vectơ $\vec{p}$ khác vectơ 0, tổng của $\vec{p}$ và vectơ thu được từ $\vec{p}$ nhờ phép quay góc 2α bằng vectơ nhận được từ $\vec{p}$ nhờ phép quay góc α.

Bài tập 8 (Olympic Toán lần thứ 12 Liên bang Nga). Hai tam giác vuông ABC và $A'B'C'$ bằng nhau ($\angle C = \angle C' = 90°$) được đặt trong mặt phẳng sao cho trung điểm M của các cạnh AB và $A'B'$ trùng nhau và các đỉnh của hai tam giác được đánh số theo cùng chiều dương. Gọi D là giao điểm của các đường thẳng BC và $B'C,'$ E là giao điểm của các đường thẳng AC và $A'C'$. Chứng minh rằng bốn điểm C, D, M, E cùng nằm trên một đường tròn.

Bài tập 9 (IMO shortlist 1992). CHo tứ giác $ABCD$ thỏa mãn điều kiện $AC \perp BD$. Vẽ ra ngoài tứ giác $ABCD$ bốn hình vuông $ABEF, BCGH, CDIJ, DAKL$. Giao điểm của bốn đường thẳng CL, DF, AH, BJ được kí hiệu lần lượt là P_1, Q_1, R_1, S_1, còn giao điểm của bốn đường thẳng AI, BK, CE, DG được kí hiệu lần lượt là P_2, Q_2, R_2, S_2. Chứng minh rằng hai tứ giác $P_1Q_1R_1S_1$ và $P_2Q_2R_2S_2$ bằng nhau.

Bài tập 10 (Vô địch Bungari 1979). Các đỉnh của ngũ giác lồi được sắp xếp sao cho các tam giác ABC và CDE là những tam giác đều. Chứng minh rằng nếu O là tâm của tam giác ABC, còn M và N lần lượt là trung điểm của BD và AE thì các tam giác OME và OND đồng dạng.

Bài tập 11 (Đề thi HSG Quốc gia năm học 2012). Cho tam giác ABC cố định trên đường tròn O (BC không đi qua tâm O) và điểm A thay đổi trên cung lớn BC sao cho $AB \neq AC$. Đường tròn nội tiếp (I) của tam giác ABC tiếp xúc với BC tại D. Gọi I_a là tâm đường tròn bàng tiếp góc BAC. L là giao điểm của I_aD với OI và E là điểm trên (I) sao cho DE song song với AI.

(a) Đường thẳng LE cắt đường thẳng AI tại F. Chứng minh rằng $AF = AI$.

(b) Trên đường tròn (J) ngoại tiếp tam giác I_aBC lấy điểm M sao cho I_aM song song với AD, MD cắt lại (J) tại N. Chứng minh rằng trung điểm T của MN luôn thuộc một đường tròn cố định.

8. Lời kết

Trên đây chỉ là số rất ít các bài tập sử dụng phép quay và GeoGebra trong giải toán hình học. Hy vọng bài viết gây sự chú ý và hứng thú của bạn đọc sử dụng GeoGebra trong dạy và học toán.

Các bạn có thể sử dụng các tài liệu [1], [2], [9] - [13] để luyện tập sử dụng GeoGebra trong giải các bài tập về phép quay nói riêng, phép biến hình nói chung. GeoGebra còn có thể trợ giúp dạy và học trong khá nhiều lĩnh vực khác (Phân tích một số ra thừa số nguyên tố [3], Hình thành khái niệm tích phân [7], Kiểm tra các giả thuyết hình học [5], Quĩ tích [8], Phân tích đa thức thành nhân tử [4], Dựng thiết diện [6],...).

Tài liệu tham khảo

[1] Nguyễn Văn Ân, Trương Đức Hinh, Đào Tam, Phan Đức Thành, Trần Đình Viện, *Toán chọn lọc từ lớp 8 đến lớp 12*, Hội toán học và Công ty sách - thiết bị trường học Nghệ Tĩnh, 1988.

[2] Nguyễn Việt Hải, Vũ Hoàng Lâm, Phan Quân, 150 *bài tập sử dụng phép biến hình*, Nhà xuất bản Hải Phòng, 1995.

[3] Nguyễn Thị Hồng Hạnh, Đỗ An Khánh, Bùi Thị Hằng Mơ, Tạ Duy Phượng, *Sử dụng GeoGebra để phân tích số dạng* $100\cdots001$ *ra thừa số nguyên tố*, Tạp chi Toán học và Tuổi trẻ, Số 517.

[4] Nguyễn Thị Hồng Hạnh, Đỗ An Khánh, Bùi Thị Hằng Mơ, Tạ Duy Phượng, *GeoGebra - Một công cụ thí nghiệm trong phân tích đa thức thành nhân tử*, Kỷ yếu Seminar Toán Olympic, Nguyễn Văn Mậu chủ biên, Trung học Cơ sở Cầu Giấy.

[5] Nguyễn Thị Hồng Hạnh, Tạ Duy Phượng, Phạm Thanh Tâm, Nguyễn Thị Bích Thủy, Trần Lê Thủy, Nguyễn Hoàng Vũ, *Sử dụng phần mềm GeoGebra để kiểm tra giả thuyết Hình học*, Tạp chi Toán học và Tuổi trẻ, Số 52.9

[6] Nguyen Thi Hong Hanh, Ta Duy Phuong, Nguyen Thi Bich Thuy, Tran Le Thuy, *Using GeoGebra software in teaching and learning the space Geometry*, *Education of Things: Digital Pedagogy*, 2021.

[7] Nguyen Thi Hong Hanh, Ta Duy Phuong, Nguyen Thi Bich Thuy, Tran Le Thuy, Nguyen Hoang Vu, *Use GeoGebra in teaching definite integral*, Proceedings of 2nd International Conference on Innovative Computing and Cutting-edge Technologies (ICCT), 11 and 12 September, 2020, in the Springer Series "Learning and Analytics in Intelligent Systems", 2021.

[8] Pham Van Hoang, Ta Duy Phuong, Nguyen Thi Bich Thuy,Tran Le Thuy, Nguyen Thi Trang, Nguyen Hoang Vu, *Modeling of Teaching-Learning Process of Geometrical LOCI in*

the Plane with GeoGebra, in *Proceedings of 2nd International Conference on Mathematical Modeling and Computational Science,* ICMMCS 2021.

[9] Nguyễn Đăng Phất, *Các phép biến hình trong mặt phẳng và ứng dụng giải toán hình học*, Nhà xuất bản Giáo dục.

[10] Waldemar Pompe, *Xung quanh phép quay: Hướng dẫn môn Hình học sơ cấp* (người dịch Nguyễn Hùng Sơn, Nguyễn Sinh Hoa), Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội (Tủ sách Sputnik, Số 033), 2016.

[11] V. V. Praxolov (Hoàng Đức Chính, Nguyễn Dễ dịch), *Các bài toán về hình học phẳng*, Tập 1, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh, 2001.

[12] Đỗ Thanh Sơn, *Phép biến hình trong mặt phẳng*, Nhà xuất bản Giáo dục, 2006.

[13] I. M. Yaglom, *Geometric Transformations*, translated from the Russian by Allen Shield, The Mathematical Association of America (MAA), 1975.

VỀ BÀI HÌNH HỌC IMO 2022

Nguyễn Ngọc Giang - Lê Viết Ân - Nguyễn Duy Phước

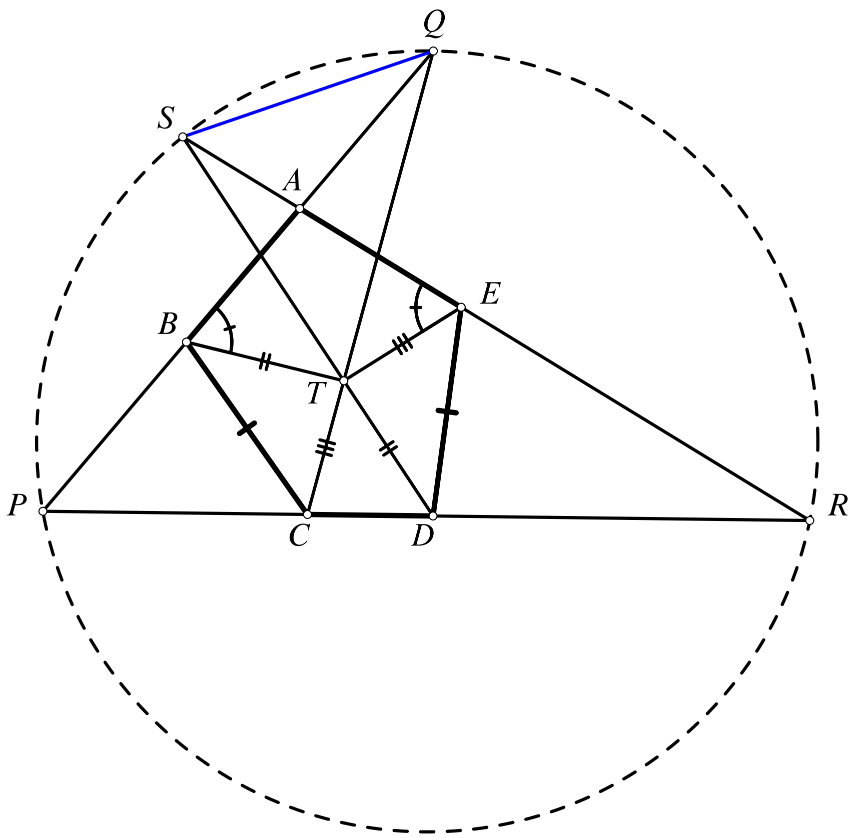
GIỚI THIỆU

Trong kỳ thì học sinh giỏi toán quốc tế năm 2022 vào ngày thi thứ hai có duy nhất một bài toán hình là bài số 4. Trong bài viết này, chúng ta cùng xem xét và tìm hiểu về bài toán này.

1. Bài thi và lời giải

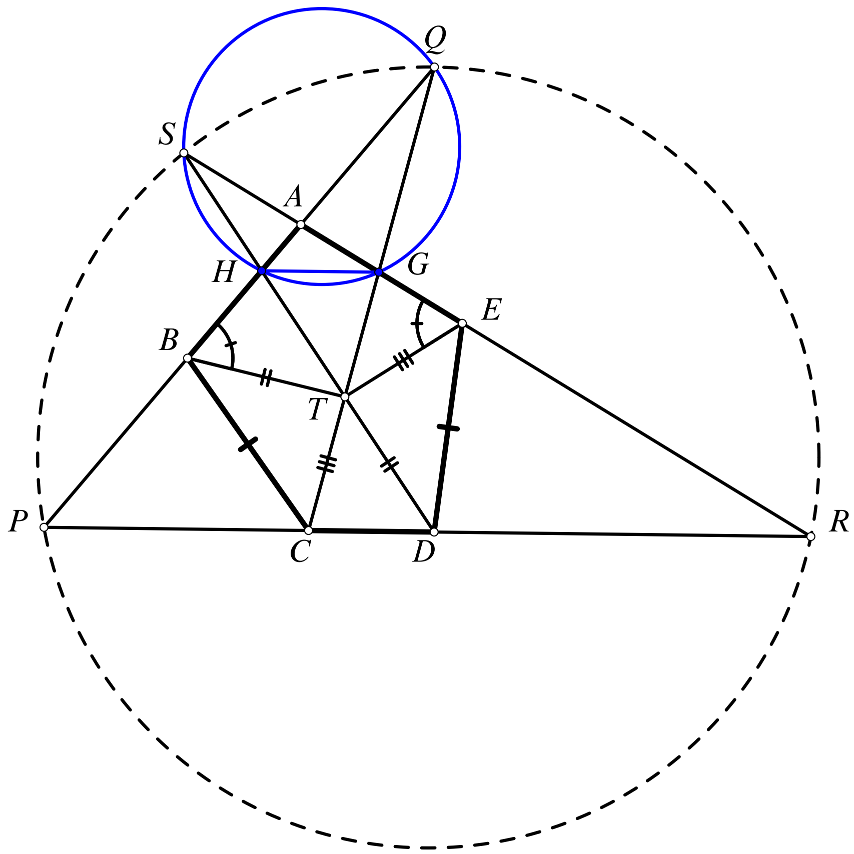
Bài toán 1 (Bài 4, IMO 2022). *Cho ngũ giác lồi $ABCDE$ với $BC = DE$. Giả sử rằng có một điểm T nằm trong $ABCDE$ sao cho $TB = TD, TC = TE$ và $\angle ABT = \angle TEA$. Đường thẳng AB cắt các đường thẳng CD và CT lần lượt tại các điểm P và Q, trong đó các điểm P, B, A, Q nằm theo thứ tự trên đường thẳng. Đường thẳng AE cắt các đường thẳng CD và DT lần lượt tại các điểm R và S, trong đó các điểm R, E, A, S nằm theo thứ tự trên đường thẳng. Chứng minh rằng các điểm P, S, Q, R nằm trên một đường tròn.*

Chứng minh. Từ $TB = TD, TC = TE$ và $BD = CE$ thì ta thấy ngay $\triangle TBC = \triangle TDE$ (c-c-c). Suy ra $\angle BTC = \angle DTE$. Do đó $\angle QTB = \angle STE$, kết hợp $\angle TBA = \angle TEA$ có ngay $\triangle QTB \backsim \triangle STE$ (g-g). Suy ra $\dfrac{TQ}{TS} = \dfrac{TB}{TE} = \dfrac{TD}{TC}$. Suy ra $\triangle TQS \backsim \triangle TDC$ (c-g-c). Do đó $\angle TQS = \angle TDC$.



Chú ý $\angle TQB = \angle TSE$ (vì $\triangle QTB \backsim \triangle STE$) nên
$\angle PQS = \angle TQS - \angle TQB = \angle TDC - \angle TSE = \angle SDP - \angle DSR = \angle DSR$ (tính chất góc ngoài tam giác) $= \angle PRS$.
Do đó tứ giác $PSQR$ nội tiếp.

Nhận xét. Ta có thể giải bài toán theo hướng dùng bổ đề Reim như sau:



Gọi $G = TC \cap AE$ và $H = TD \cap AB$. Khi đó dễ dàng có được $\triangle HBT \backsim \triangle GET$ (g-g) để suy ra $\angle BHT = \angle EGT$ và $\dfrac{TH}{TB} = \dfrac{TG}{TE}$. Từ đó suy ra $\angle QHS = \angle BHT = \angle EGT = \angle QGS$ và $\dfrac{TH}{TD} = \dfrac{TH}{TB} = \dfrac{TG}{TE} = \dfrac{TG}{TC}$. Dẫn đến các điểm S, Q, G, H cùng nằm trên một đường tròn và $GH \parallel CD$. Áp dụng bổ đề Reim cho đường tròn $\odot(SQGH)$ với hai cát tuyến $\overline{Q, H, P}$, $\overline{S, G, R}$ với chú ý $GH \parallel PQ$ thì được P, S, Q, R cùng nằm trên một đường tròn.

2. Mở rộng bài toán 1

Nhận xét. Bài toán 1 là bài toán dễ. Tuy nhiên, nếu chỉ để giải xong bài toán này thì chúng ta chưa cảm nhận được cái hay của bài toán. Do đó, việc mở rộng cho bài toán một cũng là cách để chúng ta nắm được bản chất bài toán và là một cách để chúng ta rèn luyện tư duy quan sát. Bằng việc quan sát lại lời giải thứ nhất bài toán này lần nữa thì chúng ta thấy rằng mấu chốt của lời giải thứ nhất là thu được $\angle BTC = \angle DTE$ để từ đó có được quan hệ đồng dạng của hai tam giác QBC và SED và nhận được tỉ số $\dfrac{TS}{TQ} = \dfrac{TB}{TE}$. Từ đó dẫn đến quan hệ đồng dạng hai tam giác TQS và TDC. Nhưng mấu chốt nhận được điều này lại chính là tỉ số $\dfrac{TS}{TQ} = \dfrac{TD}{TC}$. Điều này dẫn đến là ta phải đảm bảo có được $\frac{TB}{TE} = \frac{TD}{TC}$. Như bài toán 1, đề cho $TB = TD, TC = TE$ là nhận được hai tỉ số này bằng nhau. Do đó ta tổng quát lên là $TB \cdot TC = TD \cdot TE$. Lại đến đây chú ý $\angle BTC = \angle DTE$ tương đương với $\angle BTD = \angle CTE$. Suy ra $S_{TBD} = S_{TCE}$. Do đó giả thiết $TB = TD, TC = TE$ có thể thay bằng giả thiết $S_{TBD} = S_{TCE}$ và giả thiết $BC = DE$ có thể thay bằng giả thiết $\angle BTC = \angle DTE$. Ta đi đến mở rộng đầu tiên cho bài toán này:

Bài toán 2 (Mở rộng bài 4, IMO, 2022). *Cho ngũ giác lồi $ABCDE$ với $BC = DE$. Giả sử rằng có một điểm T nằm trong $ABCDE$ sao cho $\angle BTC = \angle DTE$, $\angle ABT = \angle TEA$ và diện tích hai tam giác TBD và TCE bằng nhau. Đường thẳng AB cắt các đường thẳng CD và CT lần lượt tại các điểm P và Q, trong đó các điểm P, B, A, Q nằm theo thứ tự trên đường thẳng. Đường thẳng AE cắt các đường thẳng CD và DT lần lượt tại các điểm R và S, trong đó các điểm R, E, A, S nằm theo thứ tự trên đường thẳng. Chứng minh rằng các điểm P, S, Q, R nằm trên một đường tròn.*

Chứng minh. Việc giải bài toán 2 chỉ là việc thực hiện hoàn toàn tương tự bài toán 1 với chú ý từ $\angle BTC = \angle DTE$, suy ra $\angle BTD = \angle CTE$ nên:
$TB \cdot TD = \frac{2S_{TBD}}{\sin \angle BTD} = \frac{2S_{CTE}}{\sin \angle CTE} = TC \cdot TE$ và ta thu được $\frac{TB}{TE} = \frac{TD}{TC}$.

Nhận xét. Bài toán 2 chỉ là một mở rộng đơn giản mà bất cứ bạn đọc có kỹ năng hình học tốt là có thể nghĩ đến. Với kinh nghiệm dạy và học hình nhiều năm, chúng ta còn có thể táo bạo mở rộng hơn bằng cách "tách 1 điểm" thành "nhiều điểm". Cụ thể ở đây, bằng cách kiểm chứng và vẫn đảm bảo được một số yếu tố then chốt của giả thiết, chúng ta có thể tách điểm T thành nhiều điểm hơn như sau:

Bài toán 3 (Mở rộng bài 4, IMO, 2022). *Cho ngũ giác lồi $ABCDE$. Giả sử có T nằm bên trong $ABCDE$ sao cho diện tích các tam giác TBC và TDE bằng nhau. Lấy các điểm U và V lần lượt nằm trên các đoạn TC và TD thỏa mãn $\angle ABU = \angle VEA$ và $\angle BUC = \angle DVE$. Đường thẳng AB cắt các đường thẳng CD và CT lần lượt tại các điểm P và Q, trong đó P, B, A, Q nằm theo thứ tự trên đường thẳng. Đường thẳng AE cắt các đường thẳng CD và DT lần lượt tại các điểm R và S, trong đó các điểm R, E, A, S nằm theo thứ tự trên các đường thẳng. Chứng minh rằng các điểm P, Q, R, S nằm trên một đường tròn khi và chỉ các điểm C, D, U, V nằm trên một đường tròn.*

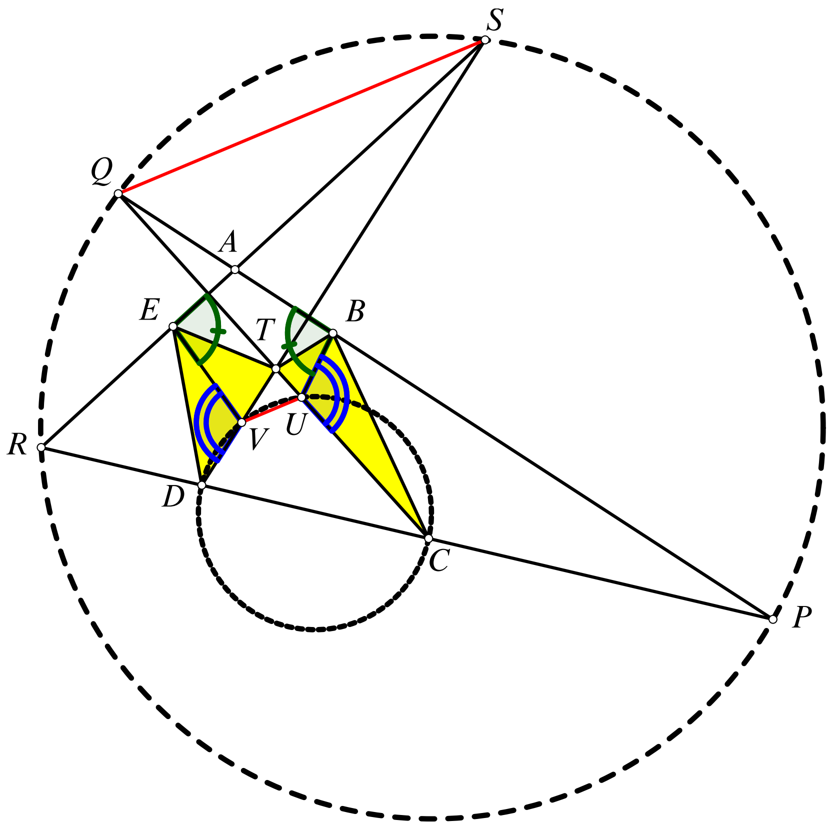
Chứng minh. Ta xây dựng một số tính chất sau đây:

(i) Dễ thấy $\angle BUQ = \angle EVS$ nên $\triangle QBU \backsim \triangle SEV$ (g-g) nên $\frac{QU}{BU} = \frac{SV}{EV}$.

(ii) Vì $S_{TBC} = S_{TED}$ nên $\frac{1}{2} \cdot BU \cdot TC \cdot \sin \angle BUC = \frac{1}{2} \cdot EV \cdot TD \cdot \sin \angle DVE$.
Suy ra $BU \cdot TC = EV \cdot TD$.
Kết hợp với (i), suy ra $QU \cdot TC = \frac{QU}{BU} \cdot BU \cdot TC = \frac{SV}{EV} \cdot EV \cdot TD = SV \cdot TD$.
Do đó: $\frac{TC}{TD} = \frac{SV}{QU}$.

(iii) Chú ý rằng $\angle CQP = \angle DSR := \alpha$ thì $\angle PQS = \angle CQS - \angle CQP = \angle CQS - \alpha$ và $\angle PRS = \angle DRS = \angle CDS - \angle DSR = \angle CDS - \alpha$.

Từ các tính chất trên ta suy ra:



($\Rightarrow$) *Nếu P, Q, R, S nằm trên một đường tròn.* Khi đó: $\angle PQS = \angle PRS$. Từ (iii) suy ra $\angle CQS = \angle CDS$, suy ra tứ giác $CDQS$ nội tiếp. Từ đó $TQ \cdot TC = TS \cdot TD$, dẫn đến $\frac{TC}{TD} = \frac{TS}{TQ}$. Kéo theo $\frac{TS}{TQ} = \frac{SV}{QU}$. Do đó theo định lí Thales đảo, có $UV \parallel QS$. Suy ra $\angle TUV = \angle CQS = \angle CDS = \angle CDV$ nên bốn điểm C, D, U, V nằm trên một đường tròn.

($\Leftarrow$) *Nếu C, D, U, V cùng nằm trên một đường tròn.* Khi đó $TC \cdot TU = TD \cdot TV$ hay $\frac{TC}{TD} = \frac{TV}{TU}$, kết hợp với (ii), suy ra $\frac{SV}{QU} = \frac{TV}{TU}$. Theo định lí Thales đảo có $UV \parallel QS$. Dẫn đến $\angle CQS = \angle TUV = \angle CDV = \angle CDS$. Do đó từ (iii), có ngay $\angle PQS = \angle PRS$, tức là P, Q, R, S cùng nằm trên một đường tròn.

Kết thúc chứng minh!

Nhận xét. Ở bài toán 3, chúng ta tách điểm T thành ba điểm T, U, V và đảm bảo C, D, U, V cùng nằm trên một đường tròn (hiển nhiên qua ba điểm không thẳng hàng xác định cho ta duy nhất đường tròn ngoại tiếp tam giác xác định bởi ba điểm đó). Đây là một sự mở rộng khá lạ với các bạn chưa quen việc tổng quát hóa bài toán từ tam giác sang tứ giác nội tiếp.

Tuy nhiên, liệu rằng chỉ có thể tách điểm để mở rộng bài toán từ tam giác sang tứ giác nội tiếp thôi sao! Câu trả lời là vẫn còn hướng mở rộng tách điểm theo hướng khác. Nhớ lại rằng chúng ta đã biết rằng trong tam giác và hình thang đều có đường trung bình. Thì ta cũng có thể xem là việc mở rộng khái niệm đường trung bình tam giác sang đường trung bình hình thang hay nói cách khác đường trung bình tam giác là một trường hợp đặc biệt của tam giác trong đó có một đáy bằng 0 đơn vị. Do đó đối với bài toán 1, chúng ta thử mạnh dạn mở rộng tách điểm T thành hai điểm U, V sao cho $UV \parallel CD$ xem sao. Để việc mở rộng này có thể thực hiện được, chúng ta quan sát lại một chút xíu như sau ở bài toán 1:

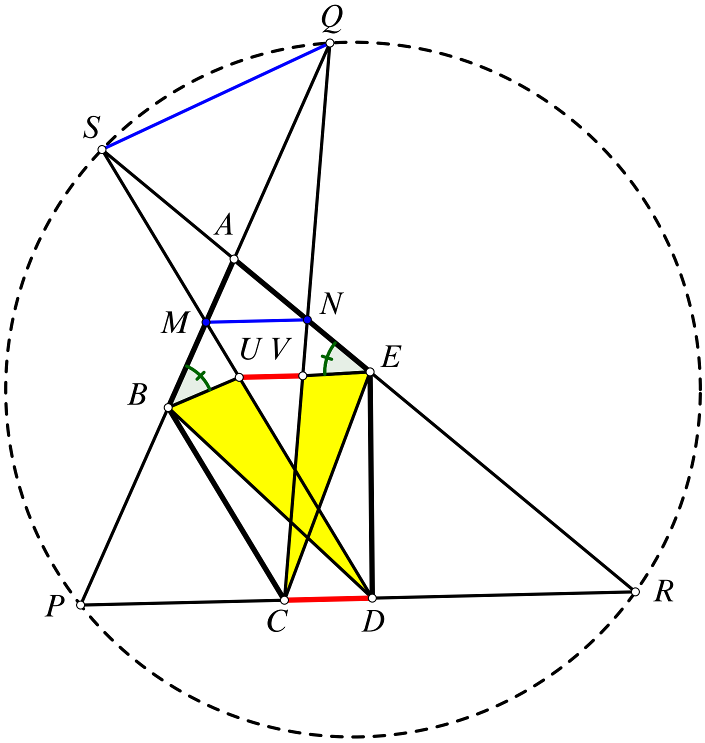
(i) Rõ ràng hai tam giác TBC và TDE đồng dạng cùng hướng, kéo theo hai tam giác TBD và TCE đồng dạng cùng hướng.

(ii) Ta lại cần tỉ số $\dfrac{TB}{TE} = \dfrac{TD}{TC}$.

Làm thế nào để từ (i) để suy ra hai (ii). Liệu tổng quát lên thì cần gì để thu được điều này! Chú ý là hai tam giác TBD và TCE đều cân tại T. Do đó ta có ngay hai tam giác TBD và TEC đồng dạng ngược hướng, điều này thu được ngay (ii). Ta đi đến mở rộng tiếp theo:

Bài toán 4 (Mở rộng bài 4, IMO, 2022). *Cho ngũ giác lồi $ABCDE$. Giả sử có các điểm U và V nằm bên trong $ABCDE$ sao cho diện tích các tam giác UBD và VEC đồng dạng ngược hướng và $\angle ABU = \angle AEV$. Đường thẳng AB cắt các đường thẳng CD và CV lần lượt tại các điểm P và Q, trong đó P, B, A, Q nằm theo thứ tự trên đường thẳng. Đường thẳng AE cắt các đường thẳng CD và DU lần lượt tại các điểm R và S, trong đó các điểm R, E, A, S nằm theo thứ tự trên các đường thẳng. Chứng minh rằng các điểm P, Q, R, S nằm trên một đường tròn khi và chỉ các điểm C, D, U, V nằm trên một đường tròn.*

Chứng minh. Gọi $M = DU \cap AB$ và $N = DU \cap AE$. Từ hai tam giác UBD và VEC đồng dạng ngược hướng và hai góc $\angle UBA$ và $\angle VAE$ bằng nhau ngược hướng, ta nhận được hai tam giác MBD và NEC đồng dạng ngược hướng. Hệ quả là $\frac{\overline{UM}}{\overline{UD}} = \frac{\overline{VN}}{\overline{VC}}$. Mà $UV \parallel CD$ nên theo định lí Thales, có ngay $MN \parallel UV \parallel CD$.



Lại từ hai tam giác MBD và NEC đồng dạng, có ngay $\angle BMD = \angle CNE$. Do đó tứ giác $SQNM$ nội tiếp. Và do đó $\angle SQP = \angle SQM = \angle SNM = \angle SRP$ nên tứ giác $PSQR$ nội tiếp.

Nhận xét. Bài toán 1 tuy dễ nhưng có nhiều hướng mở rộng thú vị, và vẫn còn nhiều hướng mở rộng nữa, tuy nhiên phần việc này chúng tôi xin dành lại cho bạn đọc.

3. Khai thác thêm tính chất

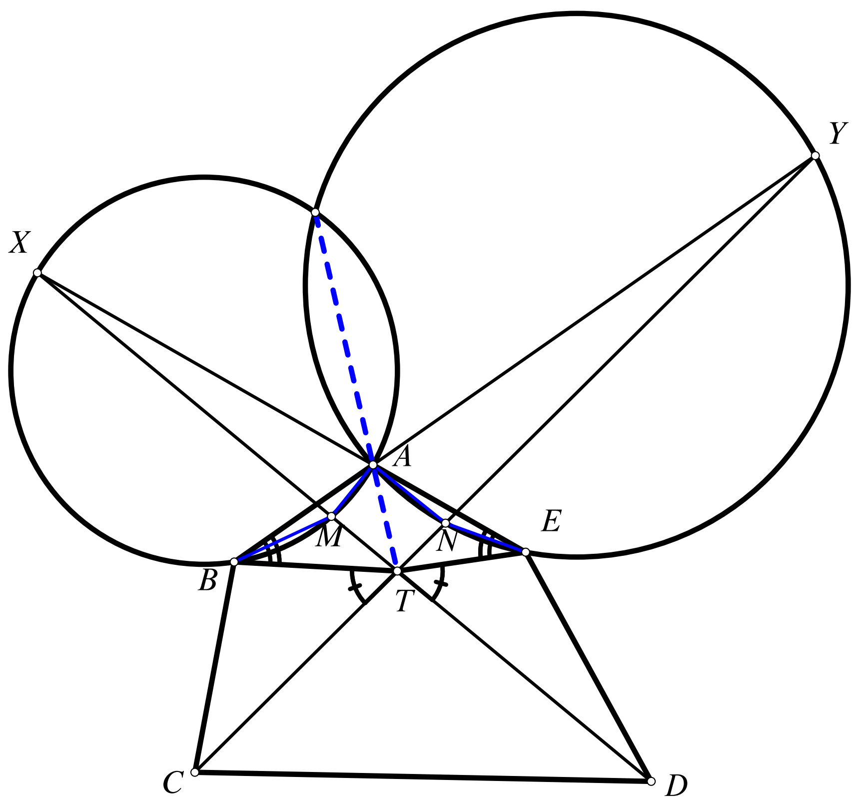
Ngoài những mở rộng ở trên, xung quanh bài 4, IMO 2022 còn có một số tính chất thú vị khác. Chúng ta nhận thấy cấu trúc này được xây dựng từ những giả thiết về góc, vì vậy một hướng tự nhiên đó là chúng ta sẽ khai thác các yếu tố liên quan đến góc, cụ thể đó là đường tròn.

Bài toán 5. *Cho ngũ giác lồi $ABCDE$. Giả sử rằng có một điểm T nằm trong $ABCDE$ sao cho $\angle BTC = \angle DTE$ và $\angle ABT = \angle TEA$. Đường thẳng AB cắt đường thẳng CT tại Y (trong đó A nằm giữa Y và B), đường thẳng AE cắt đường thẳng DT tại X (trong đó A nằm giữa X và E). Chứng minh rằng trục đẳng phương của hai đường tròn ngoại tiếp các tam giác AEY và ABX đi qua điểm T.*

Chứng minh (**Chứng minh**). Gọi M là giao điểm thứ hai của đường tròn $\odot(ABX)$ và đường thẳng TX, N là giao điểm thứ hai của đường tròn $\odot(AEY)$ và đường thẳng TY. Ta có

$$\begin{aligned}\angle TNE &= 180^\circ - \angle ENY = 180^\circ - \angle EAY = 180^\circ - \angle BAX \\ &= 180^\circ - \angle BMX = \angle BMT.\end{aligned}$$

Và $\angle ETN = \angle NTD - \angle DTE = \angle MTC - \angle BTC = \angle MTB$. Suy ra hai tam giác BMT và ENT đồng dạng với nhau.



Ngoài ra, dễ thấy $\angle YTB = \angle XTE$ và $\angle YBT = \angle XET$. Do đó hai tam giác BYT và EXT đồng dạng với nhau.

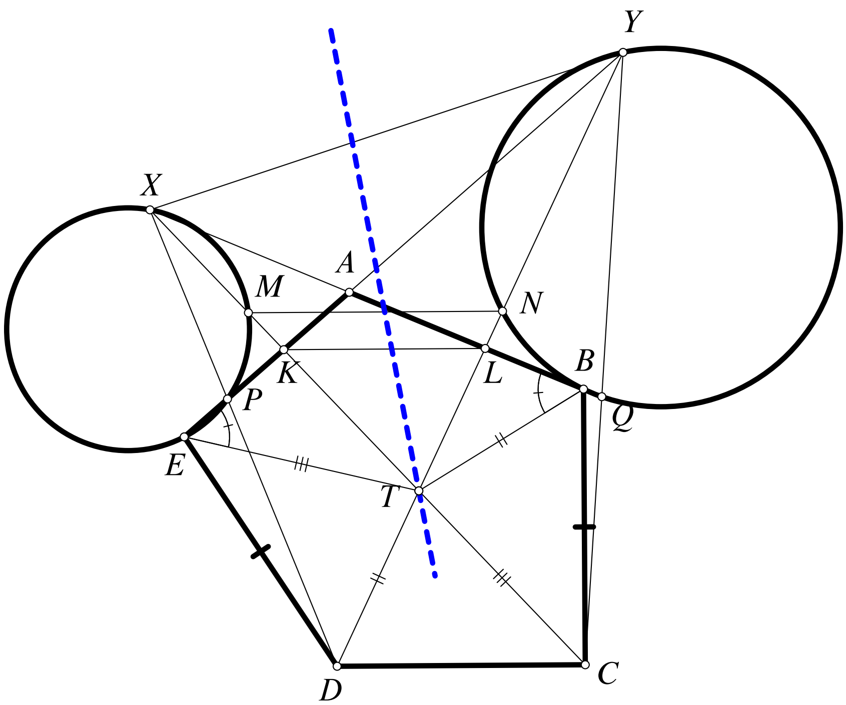
Vì vậy, $\dfrac{TM}{TN} = \dfrac{TB}{TE} = \dfrac{TY}{TX}$ hay $TM \cdot TX = TN \cdot TY$. Suy ra tứ giác $MNYX$ nội tiếp. Từ đó ta thu được điều phải chứng minh.

Nhận xét. Đây là một bài toán khá dễ. Chúng ta hoàn toàn bỏ đi được giả thiết các cạnh bằng nhau ở bài toán gốc.

Sau đây là một kết quả với hình thức tương tự nhưng khó hơn so với bài toán 5.

Bài toán 6. *Cho ngũ giác lồi $ABCDE$ sao cho $BC = DE$. Giả sử có điểm T nằm trong $ABCDE$ sao cho $TE = TC$, $TB = TD$ và $\angle ABT = \angle TEA$. Đường thẳng AB cắt đường thẳng TC tại X (trong đó A nằm giữa X và B), đường thẳng AE cắt đường thẳng TD tại Y (trong đó A nằm giữa Y và E). Đường thẳng AB cắt đường thẳng CY tại Q, đường thẳng AE cắt đường thẳng DX tại P. Chứng minh rằng trục đẳng phương của hai đường tròn ngoại tiếp các tam giác PEX và QBY đi qua điểm T.*

Chứng minh. Giả sử đường thẳng TC lần lượt cắt AE, $\odot(PEX)$ tại K và M $(M \neq X)$; đường thẳng TD lần lượt cắt AB, $\odot(QBY)$ tại L và N $(N \neq Y)$. Dễ thấy $\angle XTB = \angle YTE$ và $\angle XBT = \angle YET$. Nên hai tam giác XBT và YET đồng dạng với nhau. Suy ra $\angle TXB = \angle TYE$ và $\dfrac{TX}{TY} = \dfrac{TB}{TE} = \dfrac{TD}{TE}$. Điều này chứng tỏ hai tứ giác $DCYX$, $KLYX$ nội tiếp. Nên dễ dàng chứng minh được $KL \parallel CD$.



Ta có $\angle XKP = 180° - \angle XKY = 180° - \angle KLY = \angle YLQ$, $\angle KXP = \angle CXD = \angle CYD = \angle QYL$. Nên hai tam giác XKP và YLQ đồng dạng. Ngoài ra, $\angle KET = \angle LBT$, $\angle EKT = \angle XKY = \angle XLY = \angle TLB$. Nên hai tam giác TKE và TLB cũng đồng dạng.

Mặt khác, dễ thấy $KM = \dfrac{KP \cdot KE}{KX}$, $LN = \dfrac{LB \cdot LQ}{LY}$. Suy ra

$$\frac{KM}{NL} = \frac{KP}{LQ} \cdot \frac{KE}{LB} \cdot \frac{LY}{KX} = \frac{KX}{LY} \cdot \frac{TK}{TL} \cdot \frac{LY}{KX} = \frac{TK}{TL}.$$

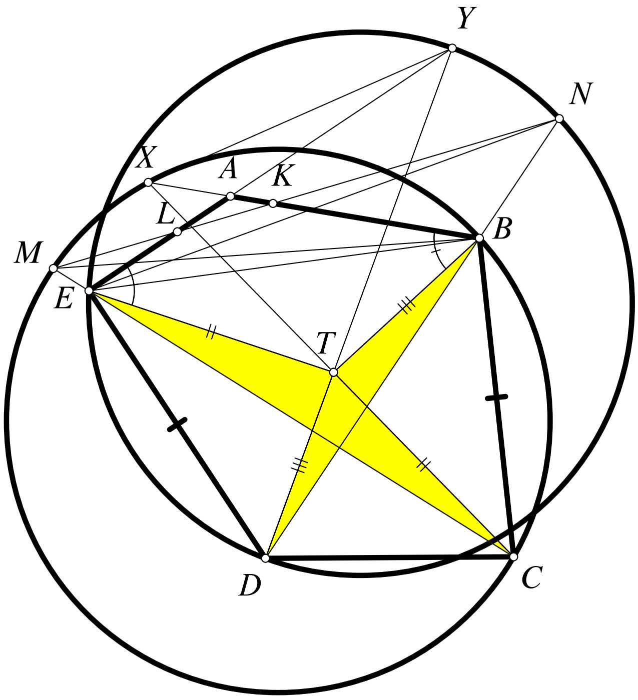
Nên áp dụng định lý Thales đảo, ta có $MN \parallel KL \parallel CD$. Mà tứ giác $DCYX$ nội tiếp. Vì vậy tứ giác $MNYX$ cũng nội tiếp hay $TM \cdot TX = TN \cdot TY$. Từ đây ta thu được điều phải chứng minh.

Nhận xét. Ý tưởng chứng minh hoàn toàn tương tự như bài toán 5. Cái khó ở đây là chúng ta cần phải thông qua nhiều kết quả trung gian để đi đến đẳng thức chính. Trong lời giải này, chúng ta đã sử dụng lại một số kết quả đặc trưng cho bài toán gốc, mà chủ yếu đó là các cặp tam giác đồng dạng.

Tiếp theo, nếu thay đổi cách nhìn vào bài toán, cụ thể là thay đổi việc thiết lập các đường tròn ngoại tiếp cho các tam giác thì sẽ thu được bài toán sau.

Bài toán 7. *Cho ngũ giác lồi $ABCDE$ sao cho $BC = DE$. Giả sử có điểm T nằm trong $ABCDE$ sao cho $TE = TC$, $TB = TD$ và $\angle ABT = \angle TEA$. Đường thẳng AB cắt đường thẳng TC tại X (trong đó A nằm giữa X và B), đường thẳng AE cắt đường thẳng TD tại Y (trong đó A nằm giữa Y và E). Đường thẳng CE cắt $\odot(CBX)$ tại điểm thứ hai là M. Đường thẳng BD cắt $\odot(DEY)$ tại điểm thứ hai là N. Đường thẳng MN lần lượt cắt các đường thẳng AB, AE tại K, L. Chứng minh rằng bốn điểm B, E, K, L cùng nằm trên một đường tròn.*

Chứng minh. Dễ thấy $\angle BTX = \angle ETY$ và $\angle XBT = \angle YET$. Nên $\angle BXT = \angle EYT$. Suy ra $\angle ENB = \angle END = \angle EYD = \angle CXB = \angle CMB = \angle EMB$. Do đó tứ giác $BEMN$ nội tiếp.



Ta có $TB = TD, TC = TE$ và $\angle DTB = \angle DTC + \angle BTC = \angle DTC + \angle DTE = \angle ETC$. Nên hai tam giác cân TDB và TEC đồng dạng. Do đó $\angle TBD = \angle TEC$. Suy ra $\angle ABD = \angle AEC$. Vì vậy $\angle KBN = \angle LEM$. Đến đây, ta có biến đổi góc

$$\angle ALK = 180^\circ - \angle LEM - \angle LME = \angle EBN - \angle KBN = \angle KBE.$$

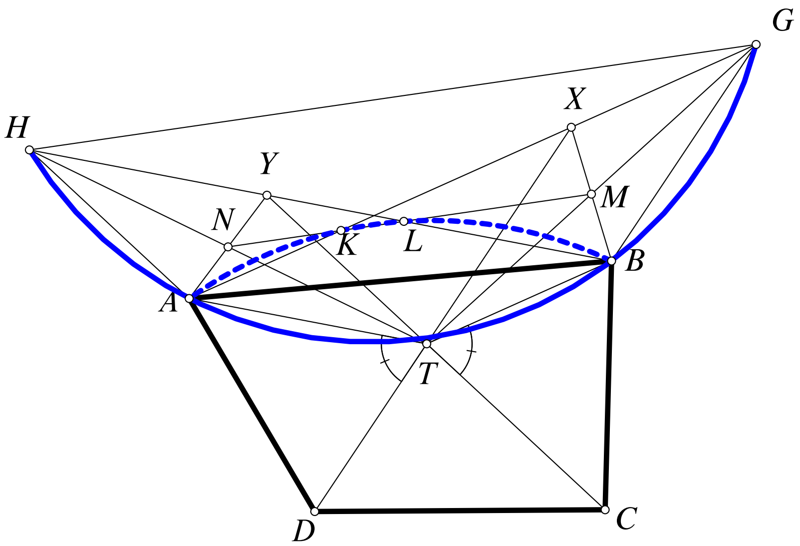
Vậy tứ giác $BELK$ nội tiếp.

Cuối cùng, chúng ta sẽ sử dụng phương pháp đặc biệt hóa để khai thác cấu hình này. Nhìn chung, cấu hình này khá tổng quát, nên chúng ta có thể đặc biệt hóa được. Đầu tiên, ta cần quan sát bài toán gốc và cần chú ý đến các giả thiết mang tính tổng quát. Chẳng hạn, ta thấy trong bài toán 1 có giả thiết hai góc đối bằng nhau ($\angle ABT = \angle TEA$). Điều này làm ta liên tưởng đến hình bình hành, từ đó thu được bài toán sau.

Bài toán 8. *Cho tứ giác lồi $ABCD$. Giả sử rằng có điểm T nằm trong $ABCD$ sao cho $\angle BTC = \angle ATD$. Đường thẳng qua A và song song với TB cắt đường thẳng TD tại X (trong đó T nằm giữa X và D), đường thẳng qua B và song song với TA cắt đường thẳng TC tại Y (trong đó T nằm giữa Y và C). Đường thẳng nối trung điểm của hai đoạn thẳng BX và AY lần lượt cắt các đường thẳng AX, BY tại K, L. Chứng minh rằng bốn điểm A, B, K, L cùng nằm trên một đường tròn.*

Chứng minh. (Đỗ Đại Phong, học sinh 11T1, trường THPT Chuyên Quốc Học - Huế) Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BX, AY; G, H lần lượt là điểm đối xứng của T qua M, N. Khi đó

$BGXT$ và $AHYT$ là các hình bình hành. Lại có $AX \parallel TB$ và $BY \parallel TA$ nên $G \in AX$ và $H \in BY$.

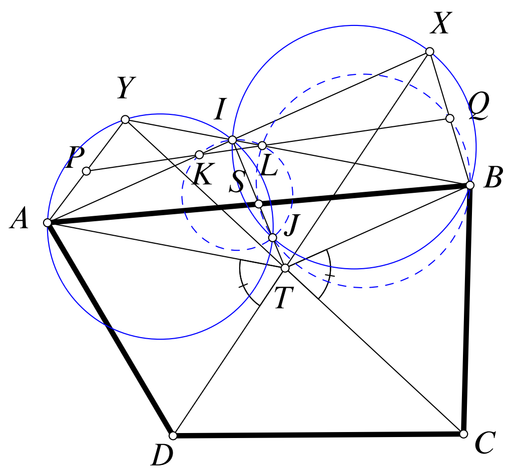


Vì $AX \parallel TB$ và $BY \parallel TA$ nên $\angle TAX = \angle TBY$. Mặt khác, dễ dàng chứng minh được $\angle ATX = \angle BTY$. Do đó $\Delta AXT \backsim \Delta BYT$. Suy ra $\angle AXT = \angle BYT$. Vì vậy

$$\angle AGB = \angle AXT = \angle BYT = \angle BHA.$$

Nên tứ giác $AGHB$ nội tiếp. Mặt khác, do $MN \parallel GH$ nên $KL \parallel GH$. Từ đó, áp dụng bổ đề Reim, ta thu được bốn điểm A, B, K, L cùng nằm trên một đường tròn.

Chứng minh. Gọi I là giao điểm của AX và BY; P, Q, S lần lượt là trung điểm của AY, BX, AB; J là giao điểm thứ hai của hai đường tròn $\odot(AYI)$ và $\odot(BXI)$.



Dễ thấy $ATBI$ là hình bình hành nên S là trung điểm của AB và $\angle TAI = \angle IBT$. Từ đó, áp dụng bài toán 5, ta có ba điểm T, I, J thẳng hàng. Hay bốn điểm I, J, S, T thẳng hàng.
Ta nhận thấy hai tam giác JAY và JXB đồng dạng cùng hướng. Nên hai tam giác JYP và JBQ đồng dạng cùng hướng. Vì thế hai tam giác JPQ và JYB cũng đồng dạng cùng hướng. Suy ra $\angle LQJ = \angle LBJ$. Nên bốn điểm J, B, Q, L cùng nằm trên một đường tròn. Từ đó, ta được J là điểm Miquel của tứ giác toàn phần tạo bởi bốn đường thẳng (AX, BY, BX, PQ). Nên $J \in \odot(IKL)$.
Chú ý $IX \parallel TB$ nên $SQ \parallel IX$. Do đó, ta dễ dàng chứng minh được bốn điểm J, S, Q, B cùng nằm trên một đường tròn. Khi đó, năm điểm J, S, L, Q, B cùng nằm trên một đường tròn.
Suy ra, $\angle IKL = \angle IJL = \angle SJL = \angle SBL = \angle ABL$. Vậy bốn điểm A, B, K, L cùng nằm trên một đường tròn.

Nhận xét. Lời giải ở cách 1 là một lời giải đẹp. Các yếu tố như song song và trung điểm đã gợi cho việc dựng các điểm phụ ở cách 1. Trong khi đó, lời giải ở cách 2 xuất phát từ một kết quả liên quan tới mô hình vị tự quay và điểm Miquel.

4. Lời kết

Chúng ta vừa có một số khám phá xoay quanh bài toán IMO 2022. Các bài toán IMO luôn là các bài toán được nhiều người quan tâm và nghiên cứu. Bằng các thao tác tư duy như khái quát hóa, khai thác các tính chất, đặc điểm của bài toán, chúng ta đã thu được nhiều kết quả hay và bổ ích. Ngoài ra, chúng tôi còn sử dụng thao tác tư duy tìm nhiều cách giải. Đây là cách thức quen thuộc và quan trọng trong sáng tạo các bài toán IMO nói riêng và toán học nói chung. Hi vọng với các tìm tòi mà chúng tôi đã đưa ra ở trên đã mang đến cho các bạn nhiều điều bổ ích. Bài viết này cần trao đổi gì thêm? Mong được sự chia sẻ của các bạn.

5. Bài tập tự luyện

Bài toán 9. *Cho ngũ giác lồi $ABCDE$ sao cho $BC = DE$. Giả sử rằng có điểm T nằm trong $ABCDE$ sao cho $TE = TC$, $TB = TD$ và $\angle ABT = \angle TEA$. Đường thẳng AB cắt đường thẳng TC tại X (trong đó A nằm giữa X và B), đường thẳng AE cắt đường thẳng TD tại Y (trong đó A nằm giữa Y và E). Đường thẳng BD lần lượt cắt $\odot(CBX), \odot(DEY)$ tại các điểm thứ hai là P, Q. Đường thẳng CE lần lượt cắt $\odot(CBX), \odot(DEY)$ tại các điểm thứ hai là R, S.*

a) Chứng minh rằng tứ giác $XYSP$ là hình bình hành.

b) Chứng minh rằng trung điểm của các đoạn thẳng XY, PS, QR thẳng hàng.

Bài toán 10. *Cho tam giác ABC nhọn, không cân. Gọi X, Y lần lượt là các điểm đối xứng của B, C theo thứ tự qua CA, AB. Đường thẳng qua X và song song với AY cắt AC tại M, đường thẳng qua Y và song song với AX cắt AB tại N. Chứng minh rằng trung điểm của đoạn thẳng nối hai trực tâm của tam giác AMX và ANY là tâm đường tròn Euler của tam giác ABC.*

VỀ BÀI TOÁN ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI ĐƯỜNG THẲNG EULER SINH RA TỪ TÂM ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP

Trần Quang Hùng

Ngày 13 tháng 8 năm 2022

TÓM TẮT

Bài viết này giới thiệu hai lời giải cho bài toán đường thẳng song song với đường thẳng Euler sinh ra từ tâm nội tiếp đề nghị bởi tác giả trên diễn đàn aops. Cùng với đó là một số phân tích, bình luận và đôi lời tản mạn.

1. Mở đầu

Trong cùng một tam giác thì khái niệm đường thẳng Euler và tâm nội tiếp "dường như" không mấy liên quan. Thường thì đường thẳng Euler chỉ liên quan tới các điểm như trọng tâm, trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp, tâm đường tròn Euler, hoặc xa hơn là một số điểm như de Longchamps, điểm exeter v.v... Điều này khá dễ hiểu bởi đường thẳng Euler hầu như không liên quan tới tia phân giác của các góc tam giác. Tuy vậy ít không có nghĩa là không "tồn tại". Bài viết này giới thiệu với các bạn một bài toán dựng một đường thẳng song song với đường thẳng Euler từ tâm đường tròn nội tiếp tam giác.

Cuối bài viết này, tác giả cũng có đôi lời bàn về tọa độ trong hình học.

2. Bài toán và lời giải

Trong [3], tác giả Trần Quang Hùng đề nghị bài toán sau

Bài toán. Cho tam giác ABC với tâm đường tròn nội tiếp I. N là tâm đường tròn Euler của tam giác IBC. K là tâm ngoại tiếp của tam giác NBC. L là điểm đối xứng của K qua BC. Chứng minh rằng NL song song với đường thẳng Euler của tam giác ABC.

Thoạt nhìn bài toán này trông có vẻ khá "dễ" khi đề bài ngắn gọn với toán các "nguyên liệu" quen thuộc đó là tâm đường tròn nội tiếp, tâm đường tròn Euler, tâm đường tròn ngoại tiếp, đối xứng trục v.v... Tuy vậy khi thực hành phân tích kỹ để giải thì bài toán trên không phải "dễ".

Chúng tôi xin giới thiệu ở đây hai lời giải, lời giải thứ nhất dùng tọa độ phức của tác giả bài toán, lời giải thứ hai dùng hình học thuần túy của tác giả Nguyễn Cung Thành. (Thành hiện là học sinh lớp 11A1 Toán trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN).

Lời giải thứ nhất tham khảo từ [3]

Lời giải thứ nhất. Trong mặt phẳng phức, chọn hệ trục sao cho đường tròn ngoại tiếp (O) của tam giác ABC là đường tròn đơn vị với tọa độ các điểm $A(a^2)$, $B(b^2)$, $C(c^2)$. Khi đó theo [4] tâm đường tròn nội tiếp có tọa độ $I(-ab-bc-ca)$. Giao điểm của AI và (O) là điểm có tọa độ $J(-bc)$. J cũng là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC. Tâm đường tròn Euler N của tam giác IBC là trung điểm của đoạn IJ' với J' có tọa độ $j' = b^2 + c^2 - b^2c^2 \cdot \frac{-1}{bc} = b^2 + c^2 + bc$ (chính là đối xứng của J qua BC). Như vậy, tọa độ N là

$$n = \frac{i + j'}{2} = \frac{b^2 + c^2 - ab - ac}{2}$$

và liên hợp của n là

$$\bar{n} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} - \frac{1}{ab} - \frac{1}{ac}\right).$$

Tâm K của đường tròn ngoại tiếp tam giác NBC được cho bởi công thức ([4])

$$k = \frac{\begin{vmatrix} b^2 & 1 & 1 \\ c^2 & 1 & 1 \\ n & n\bar{n} & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b^2 & \frac{1}{b^2} & 1 \\ c^2 & \frac{1}{c^2} & 1 \\ n & \bar{n} & 1 \end{vmatrix}} = \frac{a^2b^2 + a^2c^2 - ab^3 - ac^3 + b^3c + bc^3}{2(bc + a^2)},$$

và khi đó liên hợp của k là

$$\bar{k} = \frac{a^2b^2 + a^2c^2 - ab^3 - ac^3 + b^3c + bc^3}{2b^2c^2(bc + a^2)}.$$

Điểm L đối xứng K qua BC thì tọa độ của L là (xem công thức đối xứng trục trong [4])

$$l = b^2 + c^2 - b^2c^2\bar{k} = \frac{a^2b^2 + a^2c^2 + ab^3 + ac^3 + b^3c + c^3b}{2(bc + a^2)},$$

và liên hợp của l là

$$\bar{l} = \frac{a^2b^2 + a^2c^2 + ab^3 + ac^3 + b^3c + c^3b}{2b^2c^2(bc + a^2)}.$$

Gọi H là trực tâm tam giác ABC thì $h = a^2 + b^2 + c^2$ và liên hợp của h là $\bar{h} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$.

Vậy ta xét

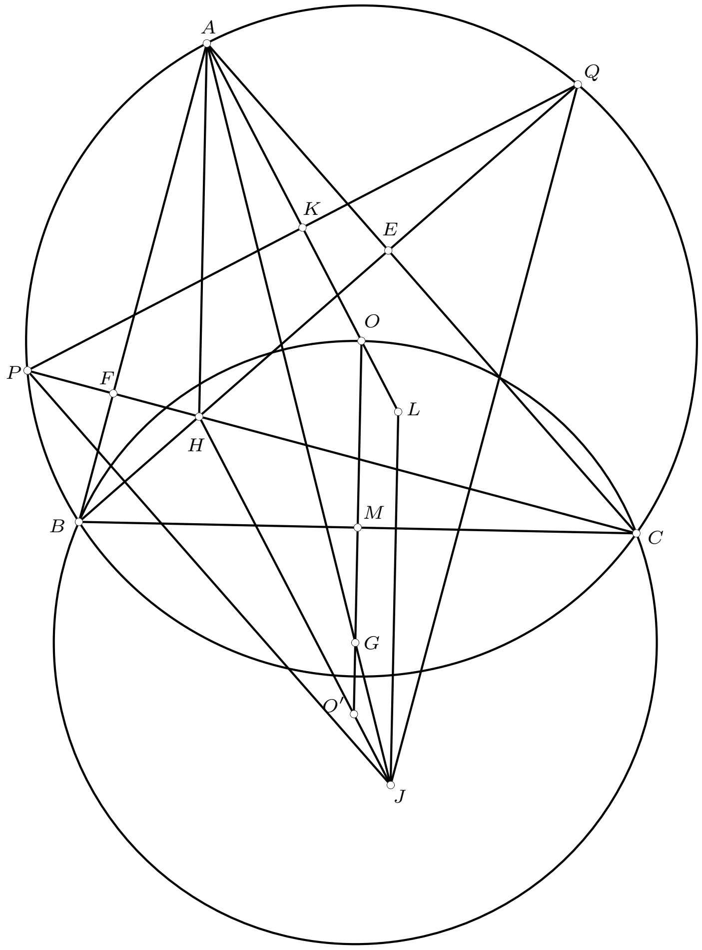
$$\frac{l-n}{h} = \frac{a(b+c)}{2(bc+a^2)} = \frac{\bar{l}-\bar{n}}{\bar{h}}.$$

Từ đẳng thức trên dễ thấy $\frac{l-n}{h}$ là một số thực k, nói cách khác $\overrightarrow{NL} = k\overrightarrow{OH}$ hay hai đường thẳng NL và OH song song. □

Lời giải thứ hai đến từ trao đổi email trực tiếp của tác giả bài báo này và tác giả Nguyễn Cung Thành.

Lời giải thứ hai. Trước tiên, chúng ta chứng minh 3 bổ đề sau

Bổ đề 1. Cho tam giác ABC nội tiếp (O), với các đường cao BE, CF giao nhau tại H. CH, BH cắt lại (O) lần thứ hai tại P, Q. J là trực tâm tam giác HPQ. Khi đó AJ đi qua tâm (BOC).



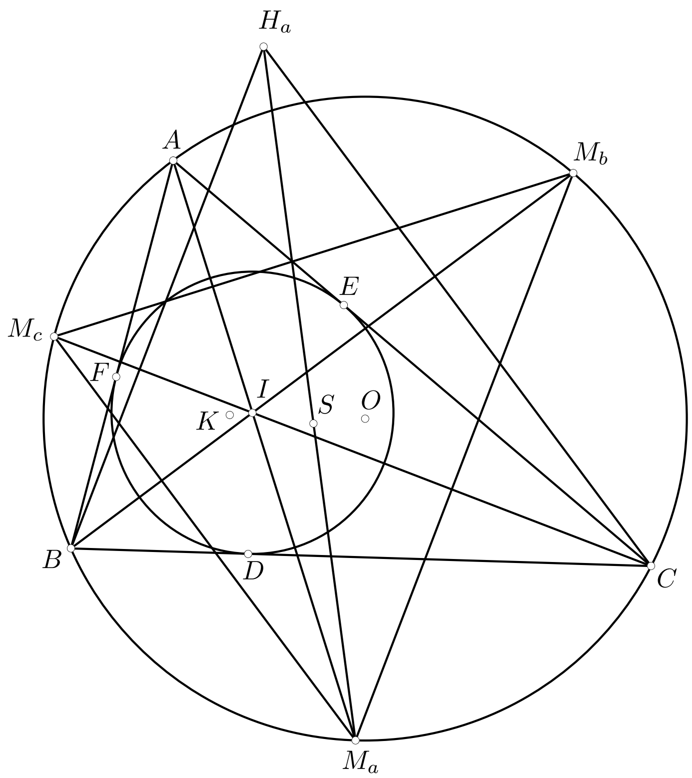
Chứng minh. Gọi G là tâm (OBC), O' đối xứng O qua BC. L là tâm (JPQ),K là trực tâm tam giác AEF, M là trung điểm BC. Vì P, Q đối xứng H qua AB, AC nên A là tâm (HPQ), kết hợp với H là trực tâm tam giác JPQ nên $AHJL$ là hình bình hành và L, A đối xứng nhau qua PQ. $AHO'O$ cũng là hình bình hành nên $OLJO'$ là hình bình hành. Lại vì P, Q đối xứng H qua AB, AC nên PQ đi qua K (PQ là đường thẳng $Steiner$ của H ứng với tam giác AEF),

PQ là trung trực AL nên K là trung điểm AL. Để chứng minh A, G, J thẳng hàng thì ta chứng minh:

$$\begin{aligned}
&\frac{AO}{AL} = \frac{OG}{LJ}\\
&\Leftrightarrow \frac{AO}{AL} = \frac{OG}{OO'}\\
&\Leftrightarrow \frac{AO}{AK} = \frac{OG}{OM}\\
&\Leftrightarrow \frac{R}{AK} = \frac{R}{AH \cdot \sin \angle OBC}\\
&\Leftrightarrow \frac{AK}{AH} = \sin \angle OBC\\
&\Leftrightarrow \frac{AK}{AH} = \sin \angle ABE\\
&\Leftrightarrow \frac{AK}{AH} = \frac{AE}{AB}
\end{aligned}$$

Điều này đúng do $\triangle AEF \cup \{K\} \sim \triangle ABC \cup \{H\}$. □

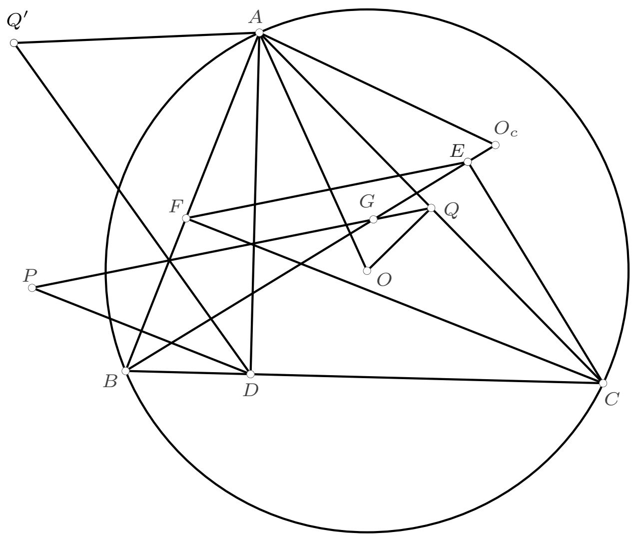
Bổ đề 2. Cho tam giác ABC nội tiếp (O) ngoại tiếp (I). Đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc BC, CA, AB tại D, E, F. K là điểm $Kosnita$ của tam giác DEF. Khi đó IK song song đường thẳng $Euler$ tam giác ABC.



Chứng minh. Gọi M_a, M_b, M_c lần lượt là các điểm chính giữa cung BC, CA, AB của tam giác ABC. H_a, H_b, H_c lần lượt là trực tâm các tam giác IBC, ICA, IAB. Với chú ý rằng M_a, M_b, M_c là tâm các đường tròn ngoại tiếp các tam giác IBC, ICA, IAB nên M_aH_a, M_bH_b, M_cH_c đồng quy tại S nằm trên đường thẳng $Euler$ của tam giác ABC (S là điểm $Schiffler$ của tam giác ABC). Mặt khác thì áp dụng bổ đề 1 cho tam giác $M_aM_bM_c$ với chú ý rằng I là trực tâm tam giác $M_aM_bM_c$ ta cũng có M_aH_a, M_bH_b, M_cH_c đồng quy tại điểm $Kosnita$ của tam giác $M_aM_bM_c$. Từ đây S là điểm $Kosnita$ của tam giác $M_aM_bM_c$.

Hai tam giác DEF và $M_aM_bM_c$ vị tự nhau lần lượt nhận I, K và O, S là tâm đường tròn ngoại tiếp và điểm $Kosnita$ nên $IK \parallel OS$ hay IK song song đường thẳng $Euler$ tam giác ABC. □

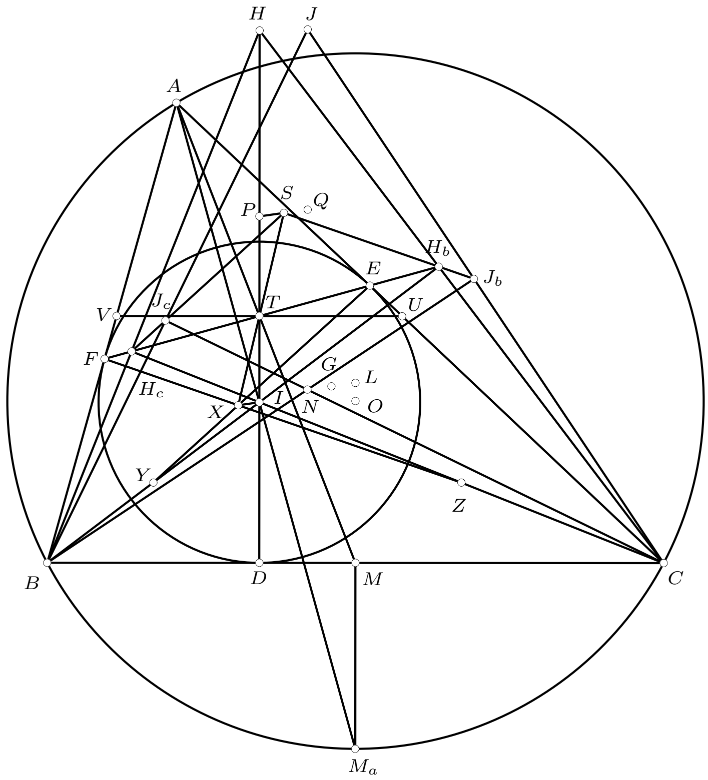
Bổ đề 3. Cho tam giác ABC nội tiếp (O) đường cao AD, CF. Đối xứng O qua AC là O_c. E là hình chiếu của C lên BO_c, đối xứng D qua AB là P, Q là trung điểm AC. Khi đó $PQ \parallel EF$.



Chứng minh. Gọi Q' đối xứng Q qua AB và G là giao của BO_c và PQ. Dễ thấy $\triangle ABD \sim \triangle AOQ$ nên $\frac{AQ'}{AD} = \frac{AQ}{AD} = \frac{AO}{AB} = \frac{AO_c}{AB}$, từ đó $\triangle AQ'D \sim \triangle AO_cB$. Điều này cho ta $\angle ABG = \angle ABO_c = \angle ADQ' = \angle APQ = \angle APG$ hay $APBG$ nội tiếp. Từ đây 5 điểm A, G, D, B, P thuộc cùng một đường tròn nên $\angle DPG = \angle DBG = \angle CFE$ mà $DP \parallel CF$ nên $PQ \parallel EF$. □

Trở lại bài toán.

Gọi G là tâm đường tròn $Euler$ của tam giác BNC thì G là trung điểm NL. Gọi Y, Z là trung điểm IB, IC và EY cắt FZ tại X thì X là điểm $Kosnita$ của tam giác DEF. Như vậy theo bổ đề 2 ta có IX song song với đường thẳng $Euler$ của tam giác ABC. Ta chỉ cần chứng minh $IX \parallel NG$. Gọi EF cắt IB, IC tại H_b, H_c thì $\angle BH_cC = \angle BH_bC = 90°$. Từ đó gọi CH_b cắt BH_c tại H thì H là trực tâm tam giác BIC. Gọi J là trực tâm tam giác BNC và BJ_b, CJ_c là đường cao của tam giác BNC. Gọi P, Q là trung điểm IH, NJ và H_cJ_c giao H_bJ_b tại S. Xét cực và đối cực đường tròn đường kính BC thì chú ý rằng PH_c, PH_b, QJ_b, QJ_c tiếp xúc (BC) nên P, S, Q thẳng hàng vì cùng nằm trên đường đối cực của điểm W là giao của H_bH_c và J_bJ_c. Mặt khác áp dụng bổ đề 3 cho tam giác BIC thì XE, XF song song SH_c, SH_b. Như vậy hai tam giác SH_bH_c và XFE vị tự nhau nên gọi XS cắt EF tại T thì T là tâm vị tự hai tam giác. Từ đây $\frac{\overline{TF}}{\overline{TH_b}} = \frac{\overline{TE}}{\overline{TH_c}}$. Điều này cho ta $\overline{TE} \cdot \overline{TH_b} = \overline{TF} \cdot \overline{TH_c}$ hay $\mathcal{P}_{T/(IB)} = \mathcal{P}_{T/(IC)}$. Qua đó T nằm trên ID.



Đường thẳng qua T song song BC cắt AC, AB tại U, V. Khi đó vì $ITVF$ và $ITEU$ nội tiếp nên $\angle IVT = \angle IFT = \angle IET = \angle IUT$ hay tam giác IVU cân tại I. Từ bổ đề hình thang ta suy ra AT đi qua trung điểm M của BC. Vì H_b nằm trên đường trung bình ứng với đỉnh C của tam giác ABC nên $H_bM \parallel AB$. Gọi M_a là điểm chính giữa cung BC không chứa A của (O) thì M_a là tâm (BIC). Như vậy, ta sẽ có $M_aM = \frac{1}{2}IH = IP$. Từ đây, áp dụng định lí $Thales$ thì $\frac{IT}{IP} = \frac{IT}{M_aM} = \frac{AT}{AM} = \frac{FT}{FH_b} = \frac{XT}{XS}$. Như vậy $XI \parallel PS \equiv PQ$ mà qua phép vị tự tâm M tỉ số 2 thì NG biến thành PQ. Như vậy $XI \parallel NG$ nên ta có điều phải chứng minh. $\square$

3. Đôi lời bàn

Tác giả bài báo cũng lưu ý rằng tác giả còn có một lời giải khác dùng tọa độ Barycentric khá ngắn gọn, tuy nhiên bạn đọc có thể tự khám phá lời giải này. Một ý tưởng giải khác dùng "điểm động" có thể xem ở [3]. Một lời giải khác dùng bổ đề của Telv Cohl đối với tâm đường tròn Euler của tam giác IBC cũng có thể xem trong [3].

Bài toán này được tác giả dùng trong quá trình tập huấn đội dự tuyển lớp 10 trường THPT chuyên KHTN. Trong quá trình làm việc, tôi đã nhận được hai lời giải khác nhau, một trong số đó là của bạn Thành như trên. Nhân việc này thì tôi cũng có một vài cảm nhận riêng. Trước tiên tôi mừng vì các em học sinh THPT chuyên KHTN đã chịu khó tìm tòi sau giờ học, kết quả là đã thực hiện được lời giải trên với ba bổ đề. Việc tích lũy kiến thức để tạo ra ba bổ đề đòi hỏi tác giả lời giải phải đọc nhiều. Tuy nhiên, lời giải cũng có thể còn đôi chỗ chưa được quá chặt chẽ, nhưng tác giả bài viết mong bạn đọc hãy châm trước một số "lỗi" này vì tác giả của lời giải còn trẻ tuổi và đã rất cố gắng.

Nếu so sánh về mặt câu chữ thì cảm giác như lời giải tọa độ ngắn gọn hơn. Nhưng thực chất trong lời giải tọa độ, đã sử dụng nhiều bổ đề phối hợp mà có thể khi đọc ta không để ý, vậy nếu diễn giải rõ các bổ đề này thì hàm lượng kiến thức sử dụng của lời giải tọa độ không ngắn hơn. Bạn đọc cũng không vội đưa ra thêm nhiều so sánh hơn giữa hai lời giải vì tác giả bài báo khi đưa ra cả hai lời giải chỉ muốn nói một điều, đó là các cách tiếp cận cho một bài toán rất phong phú. Chúng ta có thể đi hai con đường hoàn toàn khác hẳn nhau nhưng vẫn tới cùng một đích.

Qua bài toán này tác giả cũng nhấn mạnh một điều, việc đưa ra một vài bài toán thách thức "đủ tốt" cho các em học sinh chuyên toán là một việc làm quan trọng trong việc giảng dạy học sinh chuyên Toán. Tuy nhiên tôi xin phép bàn về chủ đề "giảng dạy học sinh chuyên toán" ở một bài viết khác.

Ngày trước, tôi đã có dịp được đọc hai cuốn sách về số phức trong hình học phẳng viết bằng tiếng Việt, một cuốn của **GS Đoàn Quỳnh** và một cuốn của **TS Nguyễn Hữu Điển**. Phải nói rằng tác giả ấn tượng và thích thú hai cuốn sách này. Đây cũng là hai cuốn sách mà tác giả khuyên các bạn học sinh chuyên toán nên đọc để có kiến thức về tọa độ phức. Gần đây nhiều tài liệu số phức trong hình học phẳng viết bằng tiếng Việt tràn lan. Tôi có từng nhìn qua một tài liệu thì cảm nhận người viết đó không hiểu lắm về tọa độ và chủ yếu đi dịch và chép lại y nguyên tài liệu nước ngoài. Trong suốt bài viết này, tôi chỉ tham khảo tài liệu [4] cho phương pháp tọa độ phức.

Bài toán trên được sáng tác trong lúc tác giả có dịp được đồng hành với đội tuyển Việt Nam dự thi Olympic Toán quốc tế (IMO) năm 2022 ở Na Uy. Tác giả xin bày tỏ sự biết ơn chân thành tới thầy **Lê Anh Vinh** và thầy **Lê Bá Khánh Trình**, hai người thầy lớn đã đồng hành với Olympic của Việt Nam suốt nhiều năm qua.

Tài liệu

[1] Trần Quang Hùng, Nguyễn Tiến Dũng, Đào Thị Hoa Mai, Nguyễn Đăng Quả, Đỗ Xuân Long, Tuyển chọn các chuyên đề bồi dưỡng học sinh giỏi Toán 9 hình học, NXBĐHQG năm 2021.

[2] Trần Quang Hùng, Mỗi tuần một bài toán hình học, NXBĐHQG năm 2017.

[3] Trần Quang Hùng, Topic: Line is parallel to the Euler generating from the incenter, từ diễn đàn AoPS, https://artofproblemsolving.com/community/q1h2883440p25768960.

[4] Evan Chen, Bashing Geometry with Complex Numbers, https://web.evanchen.cc/handouts/cmplx/en-cmplx.pdf.

ĐỊNH LÝ VAN AUBEL
MỘT ĐỊNH LÝ ĐẸP

Nguyễn Song Thiên Long
Lớp 11T, Trường THPT Chuyên Bến Tre

Các bài toán liên quan đến đa giác không thường xuất hiện trong các đề thi Olympic. Hầu như các bài toán chứng minh liên quan đến đa giác (hoặc tập hợp nhiều điểm) thường khai thác các tính chất đơn giản nhưng rất đẹp, không yêu cầu quá nhiều kiến thức chuyên sâu nhưng lại cần một tư duy tốt. Trong bài viết này, tôi xin giới thiệu lại một bài toán chứng minh định lý *Van Aubel* vô cùng đẹp và các mở rộng định lý mà thầy *Nguyễn Văn Lợi* và thầy *Trần Việt Hùng* đã từng đăng trên nhóm *BÀI TOÁN HAY - LỜI GIẢI ĐẸP - ĐAM MÊ TOÁN HỌC*. Qua đó đưa ra một số bài toán liên quan được chứng minh bằng định lý *Van Aubel*.

1. Phát biểu và chứng minh bài toán

Sau đây là nguyên văn bài toán được đăng bởi thầy *Nguyễn Văn Lợi*

Bài toán 1. *Về phía ngoài tứ giác $ABCD$, ta dựng các hình vuông $ABUI$, $BCQP$, $CDJW$, $DAFE$ với các tâm tương ứng là T, N, V, M. Khi đó ta có TV và MN vuông góc với nhau.*

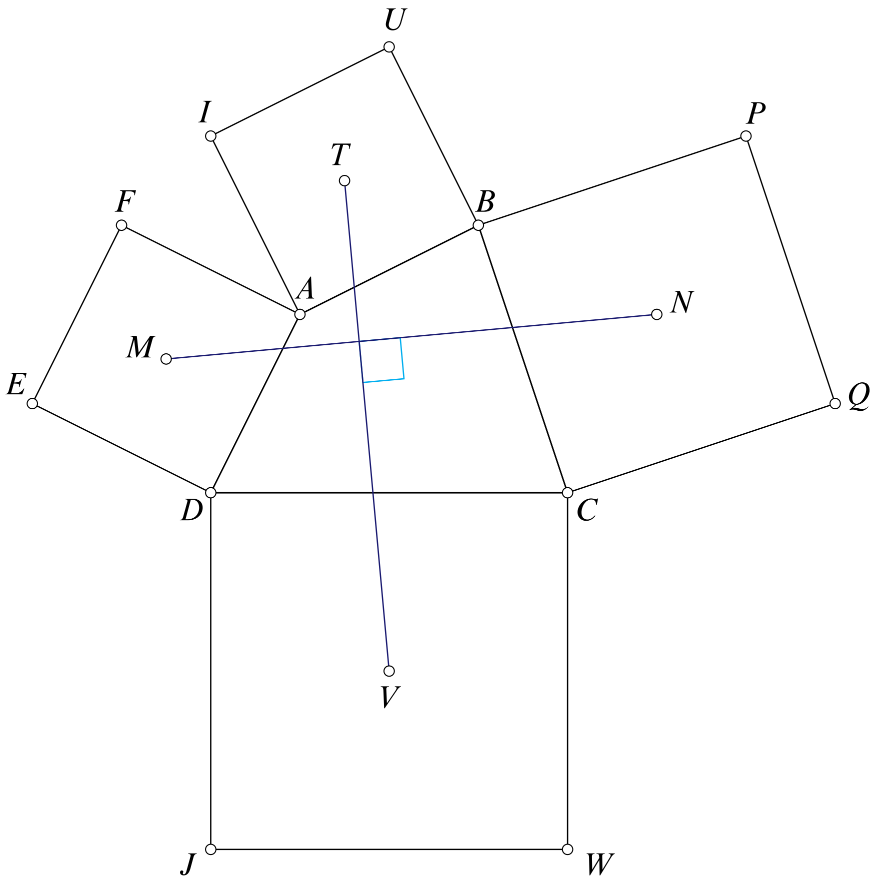
Lời giải 1. Lời giải này dùng hoàn toàn các kiến thức lớp 8, 9 như tam giác đồng dạng, tứ giác nội tiếp, kĩ thuật biến đổi góc, có thể dễ dàng tiếp cận.

Xét trường hợp tam giác ABC nhọn.

Gọi X, Y, Z lần lượt là trung điểm của AC, AB, BC; M là giao điểm của TV và MN.

Trong tam giác BTA vuông tại T có TY là trung tuyến nên suy ra $TY = \dfrac{AB}{2}$.

Tương tự, ta có $NZ = \dfrac{BC}{2}$.



Dễ dàng chứng minh được XY, XZ là hai đường trung bình của tam giác ABC.

Mặt khác, $\angle TYX = 90^\circ + \angle AYX = 90^\circ + \angle XZC = \angle XZN$ (do $XY \parallel BC$, $XZ \parallel AB$, định lý *Thales*).

Xét $\triangle TYX$ và $\triangle XZN$ có $\begin{cases} TY = XZ = \left(\frac{AB}{2}\right) \\ \angle TYX = \angle XZN \\ YX = ZN = \left(\frac{BC}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow \triangle TYX = \triangle XZN$ (c.g.c).

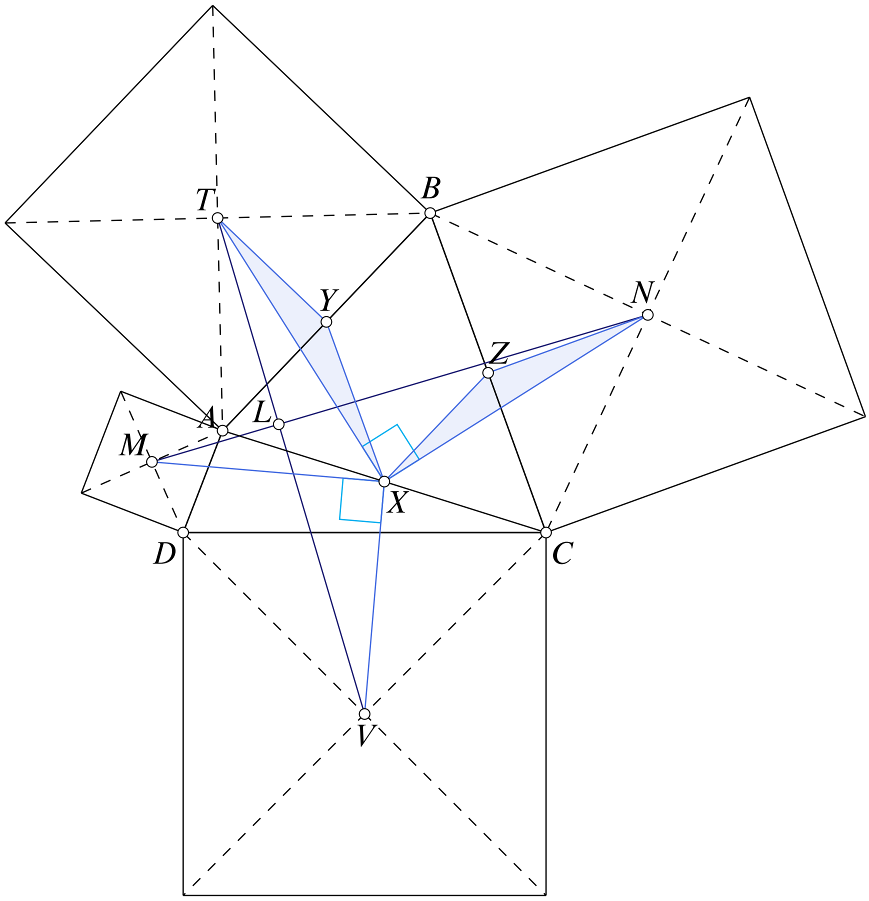
$\Rightarrow TX = XN;\ \angle TXY = \angle XNZ.$

Ta thấy $\angle TXY = \angle TXY + \angle ZXN + \angle YXZ = (\angle XNZ + \angle ZXN) + \angle XZC = (180^\circ - \angle XZN) + \angle XZC = 180^\circ - \angle NZC = 90^\circ$ nên $TX \perp XN$.

Tương tự ta có $XM \perp XV$; $XM = XV$.

Xét $\triangle MXN$ và $\triangle VXT$ có $\begin{cases} MX = VX \\ \angle MXN = \angle VXT = (\angle TXM + 90^\circ) \\ XN = XT \end{cases}$

$\Rightarrow \triangle MXN = \triangle VXT$ (c.g.c).



$\Rightarrow \angle LMX = \angle LVX.$

$\Rightarrow$ Tứ giác $LMVX$ nội tiếp.

$\Rightarrow \angle MLV = \angle MXV = 90°.$

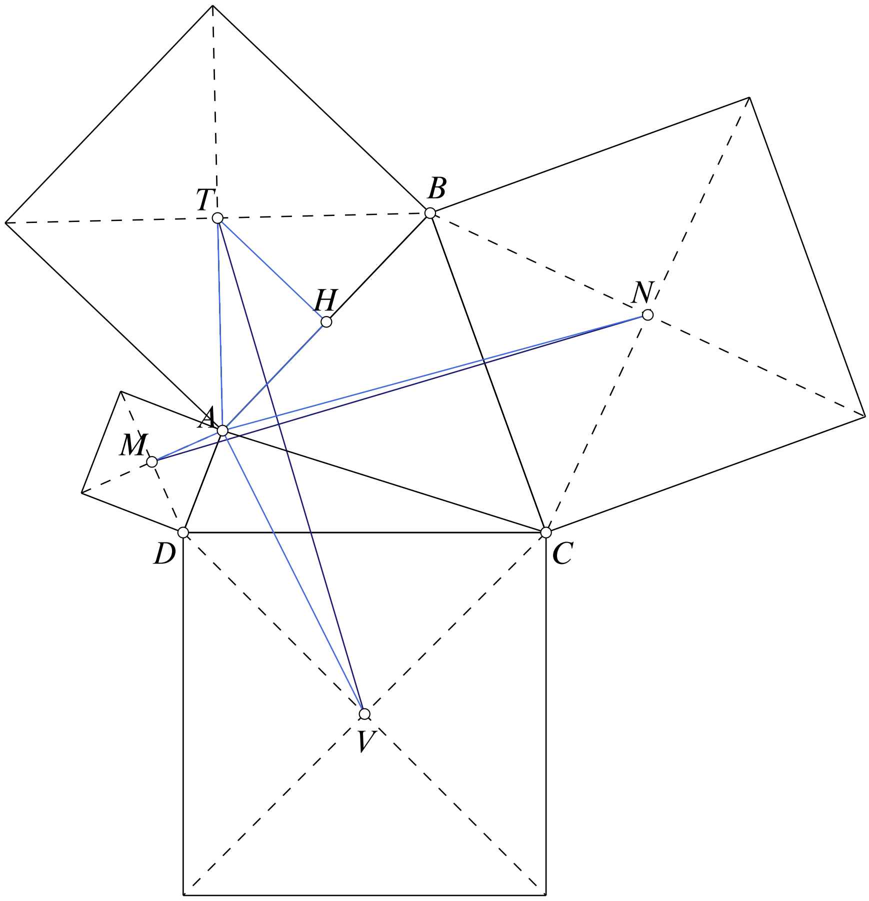
Trường hợp tam giác ABC tù chứng minh tương tự.

Phép chứng minh được hoàn tất. □

Lời giải 2. Lời giải này dùng kiến thức liên quan đến số phức và phương pháp tọa độ hóa trên mặt phẳng số phức. Từ đây, ta có thể thấy được một ứng dụng tuyệt vời của số phức trong việc chứng minh hình học phẳng.

Không mất tính tổng quát, ta biểu diễn các điểm trên mặt phẳng tọa độ phức như sau

$$A = 0; \quad B = 2x_b + 2y_b.i; \quad C = 2x_c + 2y_c.i; \quad D = 2x_d + 2y_d.i$$



Do đó ta có

$$\overrightarrow{AB} = 2x_b + 2y_b i = 2a; \quad \overrightarrow{BC} = 2(x_c - x_b) + 2(y_c - y_b)i = 2b;$$
$$\overrightarrow{CD} = 2(x_d - x_c) + 2(y_d - y_c)i = 2c; \quad \overrightarrow{DA} = -2x_d - 2y_d i = 2d.$$

Gọi H là trung điểm AB.

Ta có

$$TH \perp AB \text{ và } TP = \frac{AB}{2} \text{ nên } \overrightarrow{TH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}i = ai \Rightarrow \overrightarrow{AT} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HT} = (1+i)a.$$

Chứng minh tương tự, ta có

$$\overrightarrow{AN} = 2a + (1+i)b; \quad \overrightarrow{AV} = 2a + 2b + (1+i)c; \quad \overrightarrow{AM} = (-1+i)d.$$

Do đó ta có

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{TV} &= a + 2b + c + (c - a)\,i \\
&= (-x_b + x_c + x_d + y_b + y_c - y_d) + (-y_b + y_c + y_d - x_b - x_c + x_d)i \\
&= X_1 + Y_1 i. \\
\overrightarrow{MN} &= 2a + b + d + (b - d)i \\
&= (x_b + x_c - x_d + y_b - y_c - y_d) + (y_b + y_c - y_d - x_b + x_c + x_d)i \\
&= X_2 + Y_2 i.
\end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned}
&TV \perp MN \Leftrightarrow X_1.Y_2 + Y_1.X_2 = 0 \\
\Leftrightarrow &(-x_b + x_c + x_d + y_b + y_c - y_d)(y_b + y_c - y_d - x_b + x_c + x_d) \\
&+ (-y_b + y_c + y_d - x_b - x_c + x_d)(x_b + x_c - x_d + y_b - y_c - y_d) = 0. \text{ (đúng)}
\end{aligned}$$

Phép chứng minh được hoàn tất. □

Lời giải 3. Đây chính là lời giải mà thầy *Nguyễn Văn Lợi* đã đề xuất cho bài toán này. Cách làm này yêu cầu kiến thức về phép vị tự quay, cần một tư duy quan sát tốt và đổi lại sẽ giúp lời giải trở nên ngắn gọn nhưng vẫn đảm bảo được yêu cầu của bài toán.

Gọi L là trung điểm AC.

Ta kí hiệu phép vị tự quay tâm X, co dãn k, quay góc φ là $S_{(X,k,\varphi)}$.

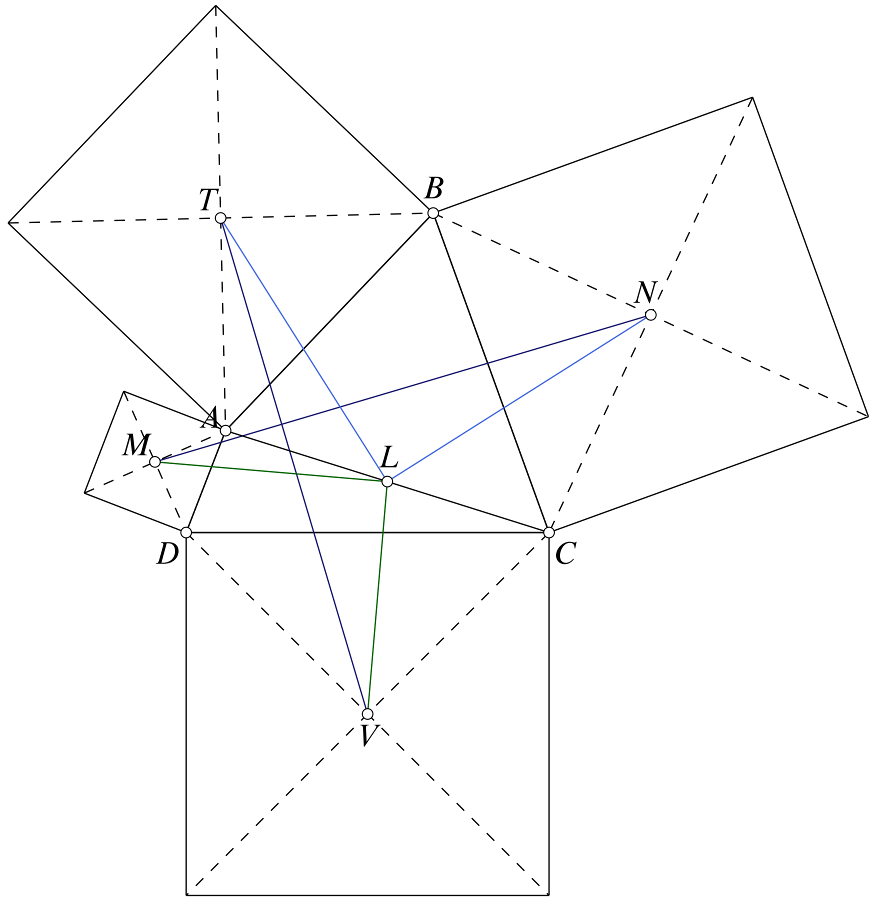
Ta có

$$\begin{cases} S_{\left(A,\frac{1}{\sqrt{2}},45^\circ\right)} : B \to T; \\ S_{\left(C,\sqrt{2},45^\circ\right)} : N \to B. \end{cases} \Rightarrow S = S_{\left(C,\sqrt{2},45^\circ\right)} \circ S_{\left(A,\frac{1}{\sqrt{2}},45^\circ\right)} : N \to T$$

Ta thấy S là phép quay góc 90° với tỉ số là 1, mà điểm L cố định nên S là phép quay tâm L góc 90°.

Chứng minh tương tự, ta được $S : M \to V$.

Từ đó suy ra $TV \perp MN$. □

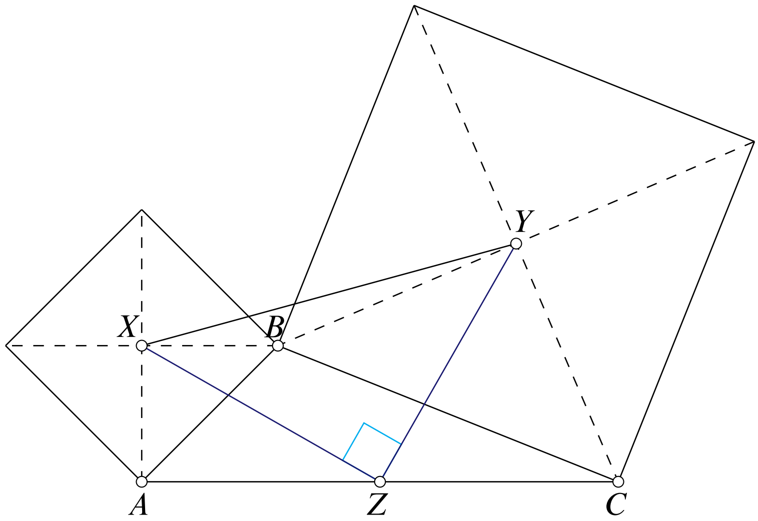


Bình luận

Bài toán trên tuy yêu cầu rất đơn giản nhưng có nhiều cách tiếp cận khác nhau, sử dụng kiến thức từ cơ bản đến nâng cao. Và việc quyết định dùng phương pháp nào để chứng minh còn phụ thuộc vào từng đối tượng cũng như quan điểm nhìn nhận trong cách chứng minh học học phẳng. Nhưng nhìn chung, dù là cách làm nào thì đây vẫn là một bài toán (định lý) thể hiện được vẻ đẹp của hình học phẳng.

Trong bài toán trên, ta thấy được sự xuất hiện của rất nhiều tam giác vuông cân thông qua việc gọi thêm các trung điểm và việc sử dụng các tam giác này chính là ý tưởng dẫn đến lời giải cho bài toán. Theo thầy *Nguyễn Văn Lợi*, bài toán tam giác vuông cân được phát biểu như sau là linh hồn của bài toán.

Bài toán 2. *Cho tam giác ABC, về phía ngoài của tam giác dựng hình vuông cạnh BC tâm Y và hình vuông cạnh AB tâm X. Khi đó, XZY là tam giác vuông cân với Z là trung điểm BC.*

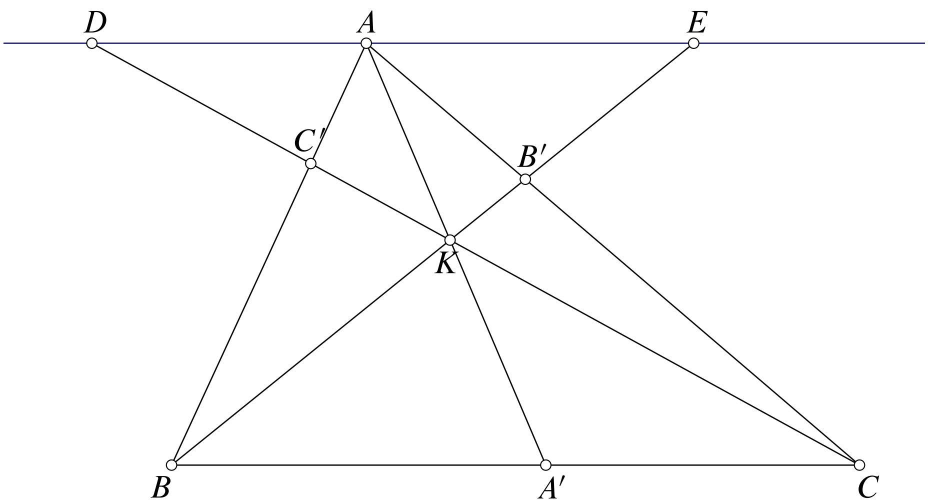


2. Định lý Van Aubel

2.1. Định lý Van Aubel cho tam giác

Định lý 1. *Trong tam giác ABC, nếu có ba đường thẳng AA', BB', CC' cắt nhau tại một điểm K nằm trong tam giác thì*

$$\frac{AK}{KA'} = \frac{AB'}{B'C} + \frac{AC'}{C'B}.$$



Chứng minh 1. Gọi E, D lần lượt là giao điểm của BB', CC' với đường thẳng qua A song song với BC.

Theo định lý *Thales*, ta có

$$\frac{AK}{KA'} = \frac{DA}{A'C} = \frac{AE}{BA'} = \frac{DA+AE}{BC} = \frac{DA}{BC} + \frac{AE}{BC} = \frac{AC'}{C'B} + \frac{AB'}{B'C}.$$

Ta có điều phải chứng minh. □

Chứng minh 2. Áp dụng định lý *Menelaus* cho tam giác ABA' và cát tuyến $C'KC$, ta có

$$\frac{AC'}{C'B}.\frac{BC}{CA'}.\frac{A'K}{KA} = 1 \Rightarrow \frac{AC'}{C'B} = \frac{CA'}{BC}.\frac{KA}{A'K}. \tag{1}$$

Áp dụng định lý *Menelaus* cho tam giác ACA' và cát tuyến $B'KB$, ta có

$$\frac{AB'}{B'C}.\frac{BC}{BA'}.\frac{A'K}{KA} = 1 \Rightarrow \frac{AB'}{B'C} = \frac{BA'}{BC}.\frac{KA}{A'K}. \tag{2}$$

Từ (1) và (2) ta có

$$\frac{AC'}{C'B} + \frac{AB'}{B'C} = \frac{AK}{A'K}\left(\frac{CA'}{BC} + \frac{BA'}{BC}\right) = \frac{AK}{A'K}.$$

□

Chứng minh 3. Theo bổ đề quen thuộc, ta có

$$\frac{AC'}{C'B} = \frac{S_{AC'K}}{S_{BC'K}} = \frac{S_{AKC}}{S_{BKC}};$$
$$\frac{AB'}{B'C} = \frac{S_{AB'K}}{S_{CKB'}} = \frac{S_{AKB}}{S_{BKC}}.$$

Suy ra

$$\frac{AC'}{C'B} + \frac{AB'}{B'C} = \frac{S_{AKC} + S_{AKB}}{S_{BKC}}. \tag{3}$$

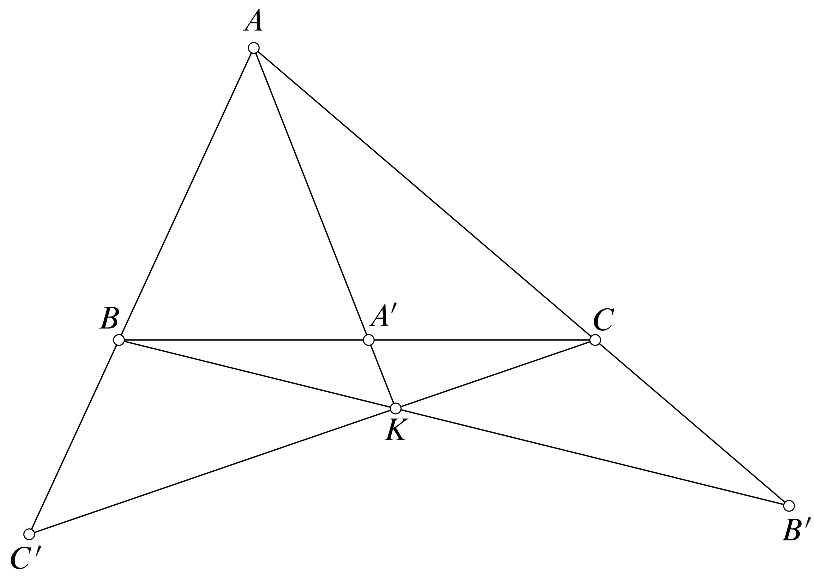
Lại có

$$\frac{AK}{KA'} = \frac{S_{AKB}}{S_{BKA'}} = \frac{S_{AKC}}{S_{CKA'}} = \frac{S_{AKB} + S_{AKC}}{S_{BKA'} + S_{CKA'}} = \frac{S_{AKB} + S_{AKC}}{S_{BKC}}. \tag{4}$$

Từ (3) và (4) suy ra

$$\frac{AK}{A'K} = \frac{AC'}{C'B} + \frac{AB'}{B'C}.$$

□



Nhận xét

Định lý *Van Aubel* vẫn còn đúng trong trường hợp điểm A' nằm trên cạnh BC còn hai điểm B', C' lần lượt nằm trên tia đối của hai tia CA, BA.

Thật vậy, ta có

$$\frac{AK}{KA'} = \frac{S_{ABK}}{S_{BKA'}} = \frac{S_{ACK}}{S_{CKA'}} = \frac{S_{ABK} + S_{ACK}}{S_{BKA'} + S_{CKA'}} = \frac{S_{ABKC}}{S_{BKC}}.$$

Lại có

$$\frac{AC'}{C'B} = \frac{S_{AC'C}}{S_{BC'C}} = \frac{S_{AC'K}}{S_{BC'K}} = \frac{S_{AC'C} + S_{AC'K}}{S_{BC'C} + S_{BC'K}} = \frac{S_{AKC}}{S_{BKC}}.$$

Tương tự, ta có

$$\frac{AB'}{B'C} = \frac{S_{AKB}}{S_{BKC}}.$$

Hay

$$\frac{AC'}{C'B} + \frac{AB'}{B'C} = \frac{S_{AKC}}{S_{BKC}} + \frac{S_{AKB}}{S_{BKC}} = \frac{S_{ABKC}}{S_{BKC}}.$$

Suy ra

$$\frac{AK}{A'K} = \frac{AC'}{C'B} + \frac{AB'}{B'C}.$$

2.2. Định lý Van Aubel cho tứ giác

Định lý 2. *Về phía ngoài tứ giác $ABCD$, ta dựng các hình vuông. Gọi P, Q, R, S là tâm các hình vuông đó. Khi đó, ta có đường thẳng $PR = QS$ và $PR \perp QS$.*

Đây chính là bài toán đã trình bày ở phần 1.

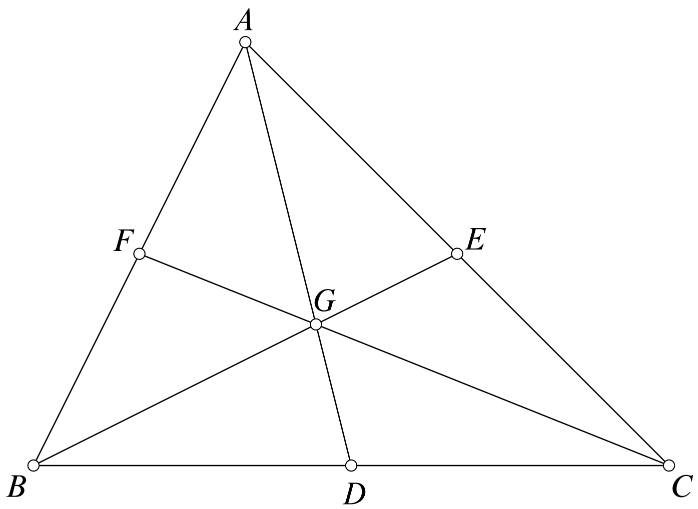
Theo nhận xét của Giáo sư *Yutaka Nishiyama*[1], định lý *Van Aubel* là một định lý đẹp trong cách phát biểu lẫn trong cách chứng minh nó! *("The beauty of this theorem lies both in the theorem itself and also in its proofs.")*.

2.3. Một số tính chất, hệ quả của định lý Van Aubel

Với S là diện tích, p là nửa chu vi và a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác ABC.

Hệ quả 1. *Cho $\triangle ABC$ có ba đường trung tuyến AD, BE, CF đồng quy tại điểm G. Khi đó*

$$\frac{AG}{AD} = \frac{2}{3}.$$



Chứng minh. Áp dụng định lý *Van Aubel*, ta có

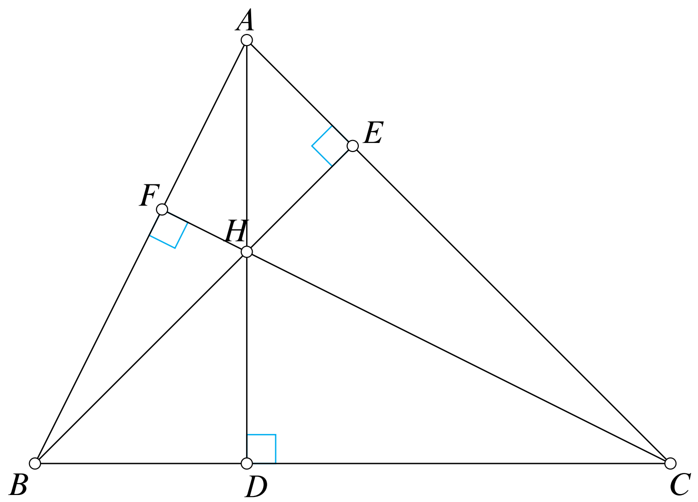
$$\frac{AG}{GD} = \frac{AE}{EC} + \frac{AF}{FB} = 2.$$

Vậy $\frac{AG}{AD} = \frac{AG}{AG+GD} = \frac{2}{3}$. □

[1] Yutaka Nishiyama (sinh ngày 21 tháng 10 năm 1948) là một nhà toán học Nhật Bản và giáo sư tại Đại học Kinh tế Osaka. Độc giả có thể tìm hiểu thêm về toán học trong đời sống hằng ngày, được ông chia sẻ tại `http://yutaka-nishiyama.sakura.ne.jp/`.

Hệ quả 2. *Cho tam giác ABC có ba đường cao AD, BE, CF đồng quy tại điểm H. Khi đó,*

$$\frac{AH}{HD} = \sqrt{\frac{(bc)^2 - 4S^2}{(ab)^2 - 4S^2}} + \sqrt{\frac{(bc)^2 - 4S^2}{(ac)^2 - 4S^2}}.$$



Chứng minh. Ta có

$$S = \frac{1}{2}AD \cdot a = \frac{1}{2}BE \cdot b = \frac{1}{2}CF \cdot c.$$

Suy ra $BE = \frac{2S}{b}$, $CF = \frac{2S}{c}$.

Mặt khác,

$$AE^2 = AB^2 - BE^2 = c^2 - \frac{4S^2}{b^2} \Rightarrow AE = \frac{1}{b}\sqrt{(bc)^2 - 4S^2};$$
$$EC^2 = BC^2 - BE^2 = a^2 - \frac{4S^2}{b^2} \Rightarrow EC = \frac{1}{b}\sqrt{(ab)^2 - 4S^2}.$$

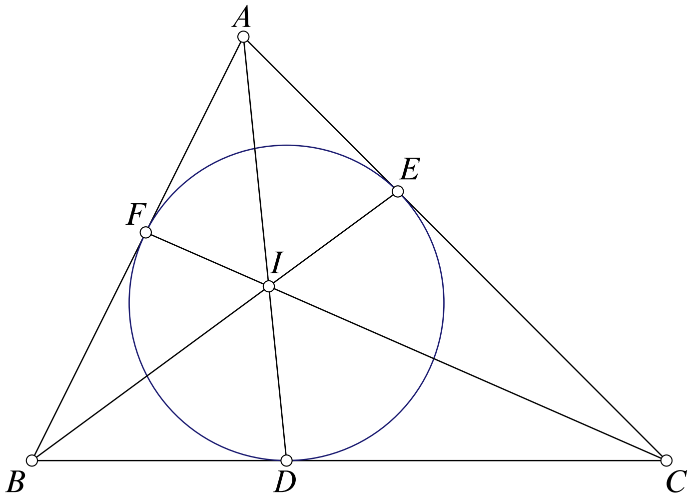
Tương tự, ta cũng có

$$AF = \frac{1}{c}\sqrt{(bc)^2 - 4S^2}; \quad FB = \frac{1}{c}\sqrt{(ac)^2 - 4S^2}.$$

Áp dụng định lý *Van Aubel*, ta có

$$\frac{AH}{HD} = \frac{AE}{EC} + \frac{AF}{FB} = \sqrt{\frac{(bc)^2 - 4S^2}{(ab)^2 - 4S^2}} + \sqrt{\frac{(bc)^2 - 4S^2}{(ac)^2 - 4S^2}}.$$

□



Hệ quả 3. *Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn có các tiếp điểm với các cạnh BC, CA, AB lần lượt là D, E, F. Các cevian AD, BE, CF đồng quy tại điểm I gọi là điểm Gergonne. Khi đó,*

$$\frac{AI}{ID} = \frac{a(p-a)}{(p-b)(p-c)}.$$

Chứng minh. Theo tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau, ta có $AE = AF,\ BF = BD,\ DC = CE$. Suy ra

$$AE + DC + BF = BD + AF + EC = \frac{a+b+c}{2} = p.$$

Vì $BF = BD$ nên $AE + BC = p$ hay $AE = p - a$.

Tương tự, $EC = p - c$ và $BF = p - b$.

Áp dụng định lý *Van Aubel*, ta có

$$\frac{AI}{ID} = \frac{AE}{EC} + \frac{AF}{FB} = \frac{p-a}{p-c} + \frac{p-a}{p-b} = (p-a)\left(\frac{p-b+p-c}{(p-b)(p-c)}\right) = \frac{a(p-a)}{(p-b)(p-c)}.$$

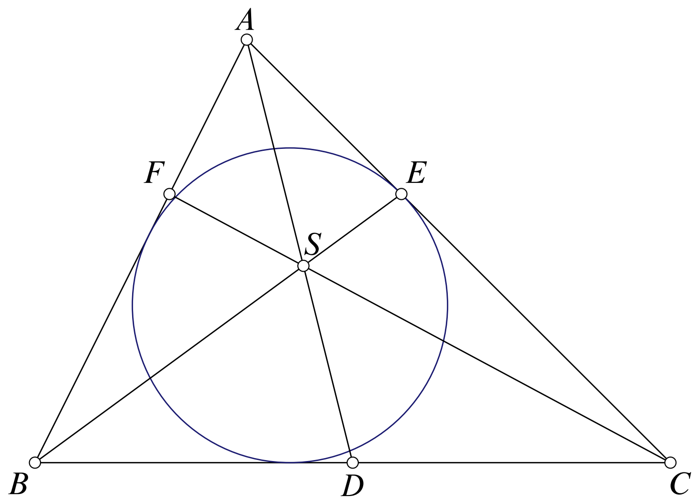
□

Hệ quả 4. *Cho tam giác ABC. Gọi AD, BE lần lượt là trung tuyến và cevian Gergonne của tam giác ABC. S là giao điểm của AD và BE. Khi đó,*

$$\frac{AS}{SD} = \frac{2(p-a)}{p-c}.$$

Chứng minh. Gọi F là giao điểm của CS và AB.

Vì AD là trung tuyến nên $BD = DC$.



Theo chứng minh *hệ quả 3*, ta được

$$AE = p - a; \quad EC = p - c. \tag{5}$$

Áp dụng định lý *Céva*, ta có

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1. \tag{6}$$

Từ (5) và (6), ta có

$$\frac{AF}{FB} = \frac{p-a}{p-c}.$$

Áp dụng định lý *Van Aubel*, ta có

$$\frac{AS}{SD} = \frac{AE}{EC} + \frac{AF}{FB} = \frac{2(p-a)}{p-c}.$$

□

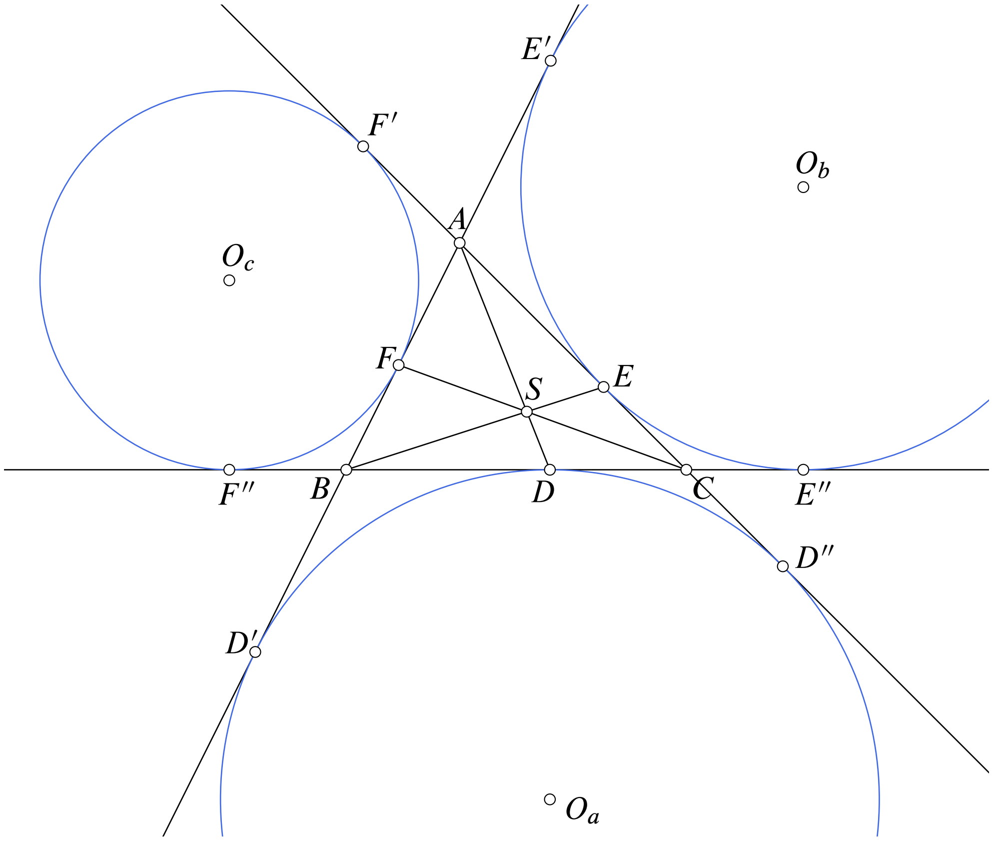
Hệ quả 5. *Cho tam giác ABC, các đoạn thẳng AD, BE, CF lần lượt nối các đỉnh A, B, C với tiếp điểm của các cạnh BC, CA, AB với đường tròn bàng tiếp gọi là các cevian Nagel. Các cevian Nagel đồng quy tại điểm S gọi là điểm Nagle. Khi đó*

$$\frac{AS}{SD} = \frac{a}{p-a}.$$

Chứng minh. Gọi các tiếp điểm như hình vẽ.

Theo tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau, ta có

$$2AD' = AD' + AD'' = AB + BD' + AC + CD'' = AB + BD + AC + CD = 2p.$$



Suy ra $AD' = AD'' = p$.

Tương tự, ta được

$$AD = AD'' = BE' = BE'' = CF' = CF'' = p.$$

Lại có

$$AE = AC - EC = AC - CE'' = AC - \left(BE' - BC\right) = b - (p - a) = p - c.$$

Tương tự, ta suy ra được

$$CE = BF = p - a; \quad AF = CD = p - b; \quad AE = BD = p - c.$$

Áp dụng định lý *Van Aubel*, ta có

$$\frac{AS}{SD} = \frac{AE}{EC} + \frac{AF}{FB} = \frac{p-c}{p-a} + \frac{p-b}{p-a} = \frac{p-c+p-b}{p-a} = \frac{a}{p-a}.$$

$\square$

Nhận xét

Định lý *Van Aubel* cho tam giác cho phép tính tỉ số $\frac{AK}{KA'}$ theo các tỉ số $\frac{AB'}{B'C}$ và $\frac{AC'}{C'B}$ với AA', BB', CC' đồng quy tại K. Ta thấy rằng có rất nhiều bộ ba các đường *cevian* đồng quy trong tam giác chẳng hạn như các *cevian trọng tâm*, các *cevian trực tâm*, các *cevian tâm đường tròn nội tiếp*, các *cevian Gergonne*, các *cevian Nagel*, các *cevian Lemoine*, các *cevian đẳng giác*, ... nên ta có rất nhiều bài toán là hệ quả của định lý *Van Aubel*. Ngoài ra, ta có thể tổ hợp các *cevian* khác nhau trong cùng một bài toán chẳng hạn *cevian trọng tâm* với *cevian Gergonne*, *cevian trọng tâm* với *cevian Nagel*, ... để tạo ra các bài toán mới.

Các hệ quả đã trình bày ở trên chính là ví dụ.

Bài toán luyện tập

Bài tập 1. Cho tam giác ABC có ba đường phân giác AD, BE, CF đồng quy tại điểm I. Chứng minh rằng

$$\frac{AI}{ID} = \frac{b+c}{a}.$$

Bài tập 2. Chứng minh rằng trong tam giác ABC, ba đường cao AD, BE, CF đồng quy tại trực tâm H của tam giác và

$$\frac{HA}{HD} = \frac{\cos \angle BAC}{\cos \angle ABC \cos \angle ACB}.$$

Bài tập 3. Cho tam giác ABC. Gọi AD, BE lần lượt là trung tuyến và *cevian Nagel* của tam giác ABC. S là giao điểm của AD và BE. Tính tỉ số $\frac{AS}{SD}$.

3. Một vài mở rộng của định lý Van Aubel

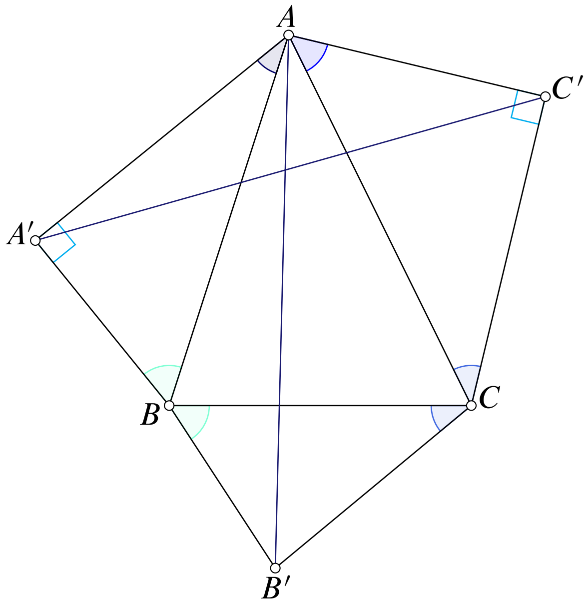
Sau đây các mở rộng của định lý *Van Aubel* mà thầy *Trần Việt Hùng* đã từng giới thiệu ở [1]

Nhìn chung, các bài toán đều rất đẹp và "*có hướng*", độc giả có thể thử chứng minh.

Mở rộng 1. *Bên ngoài tam giác ABC vẽ các tam giác ABA' vuông tại A'; ACC' vuông tại C'; BCB' có $\angle CBB' = \angle A'BA$ và $\angle BCB' = \angle C'CA$. Chứng minh rằng*

a) $\frac{A'C'}{B'A} = \sin\left(\angle A'AB + \angle CAC'\right).$

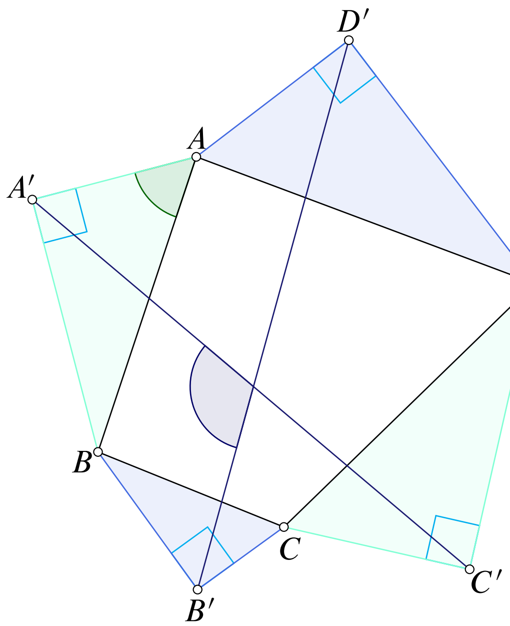
b) $(A'C'; B'A) = (AA'; AB) + (CC'; CA) \pmod{\pi}.$



Mở rộng 2. *Cho A, B, C, D là bốn điểm bất kỳ, ABA' là tam giác vuông tại A'. Vẽ các tam giác CBB', CDC' và ADD' sao cho CBB' và ABA' đồng dạng ngược hướng; CDC' và ABA' đồng dạng cùng hướng; ADD' và ABA' đồng dạng ngược hướng. Chứng minh rằng*

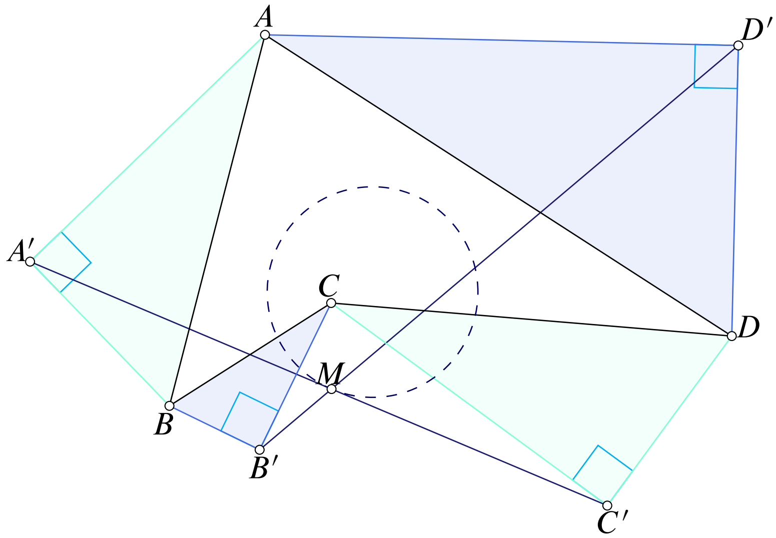
a) $A'C' = B'D'$.

b) $(A'C'; B'D') = 2\,(AA'; AB) \pmod{\pi}$.

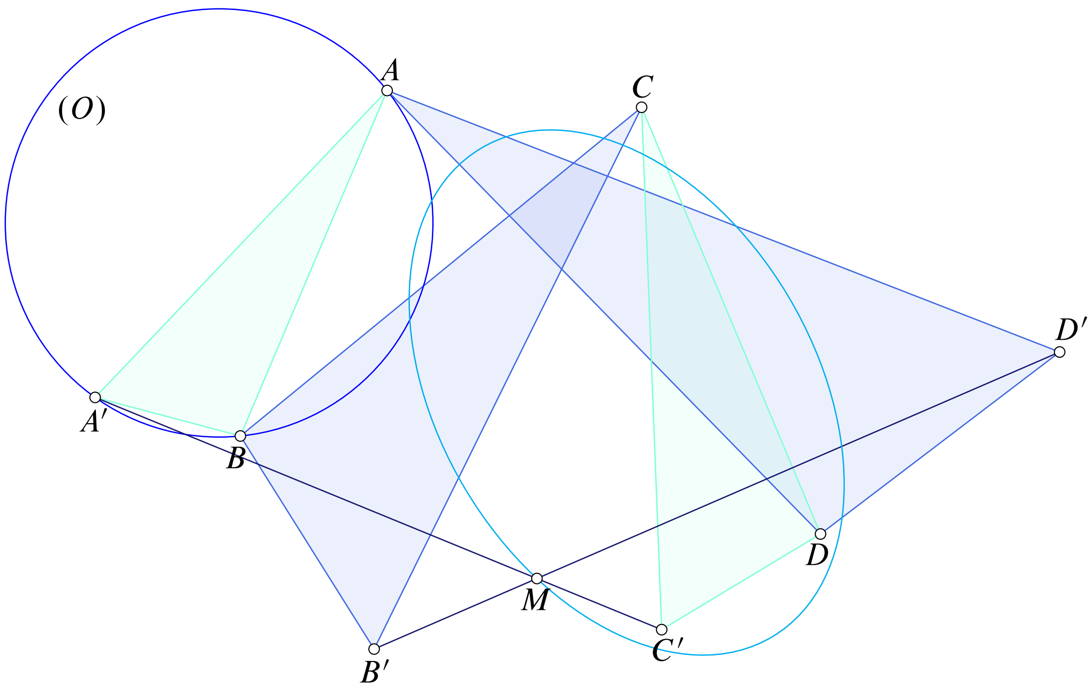


Mở rộng 3. *Cho A, B, C, D là bốn điểm cố định bất kỳ. Vẽ tam giác ABA' vuông tại A' và các tam giác CBB', CDC' và ADD' sao cho CBB' và ABA' đồng dạng ngược hướng; CDC' và*

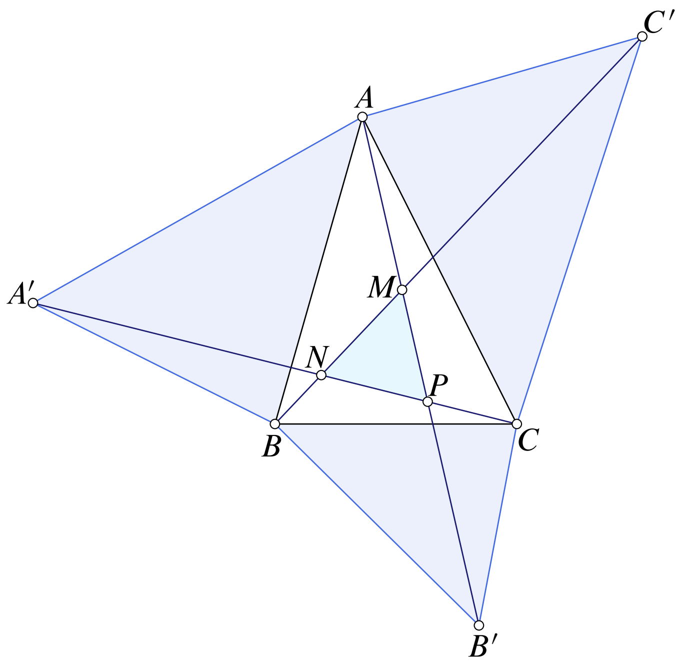
ABA' đồng dạng cùng hướng; ADD' và ABA' đồng dạng ngược hướng. Chứng minh rằng M nằm trên một đường tròn cố định khi A' thay đổi, với M là giao điểm của đường thẳng $A'C'$ và $B'D'$.



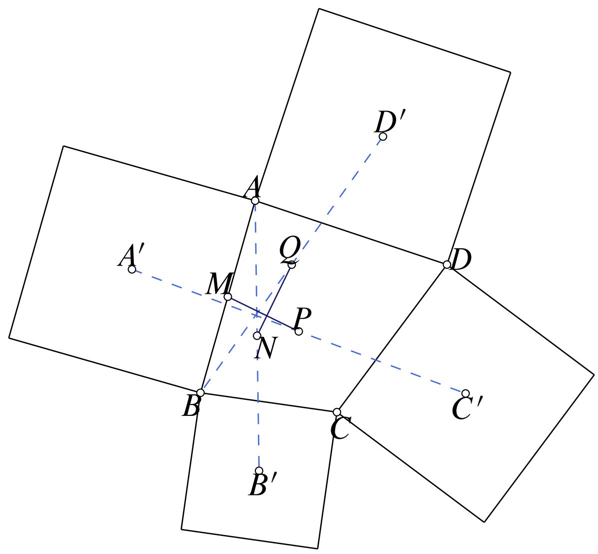
Mở rộng 4. *Cho A, B, C, D là bốn điểm cố định bất kỳ. Một đường tròn (O) cố định qua A, B, A' là một điểm trên (O) (khác A, B). Vẽ các tam giác CBB', CDC' và ADD' sao cho CBB' và ABA' đồng dạng ngược hướng; CDC' và ABA' đồng dạng cùng hướng; ADD' và ABA' đồng dạng ngược hướng. Chứng minh rằng M nằm trên một đường conic cố định khi A' thay đổi trên (O), với M là giao điểm của đường thẳng $A'C'$ và $B'D'$.*



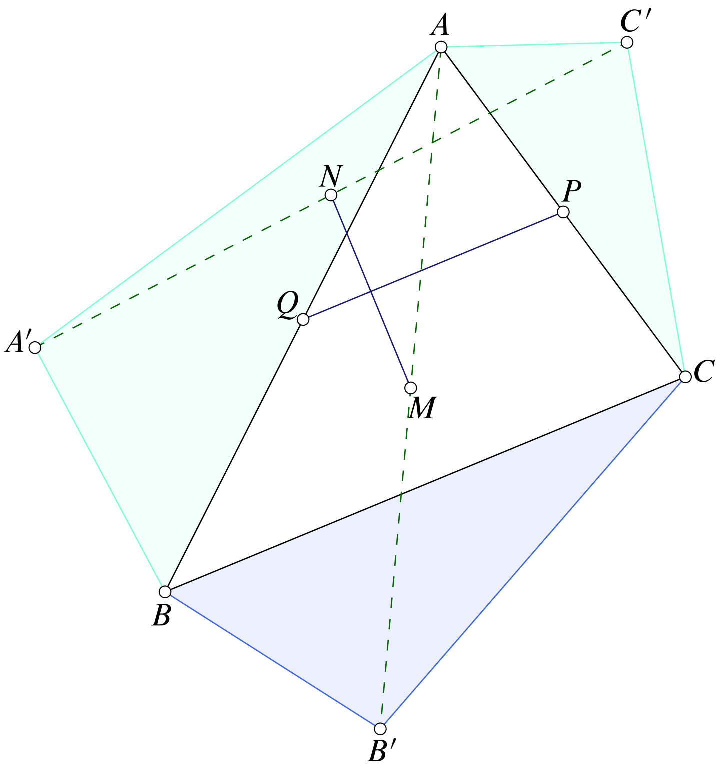
Mở rộng 5. *Tam giác ABA', BCB' và CAC' đồng dạng cùng hướng và M, N, P lần lượt là giao điểm của AB' và BC'; BC' và CA'; CA' và AB'. Chứng minh rằng nếu $AB' = BC' = CA'$ thì MNP là tam giác đều (hoặc M, N, P trùng nhau).*



Mở rộng 6. *Cho tứ giác $ABCD$, vẽ cùng bên ngoài (hoặc cùng bên trong) tứ giác này các hình vuông có các cạnh lần lượt là AB, BC, CD, DA và gọi tâm các hình vuông tương ứng là A', B', C', D'. M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của $AB, AB', A'C', BD'$. Chứng minh rằng MP và NQ bằng nhau và vuông góc với nhau.*



Mở rộng 7. *Cho các tam giác ABA', CBB' và CAC', trong đó ABA' và CBB' đồng dạng ngược hướng; ABA' và CAC' đồng dạng cùng hướng. M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của $AB', A'C', CA$ và AB. Chứng minh rằng M, N đối xứng nhau qua PQ.*



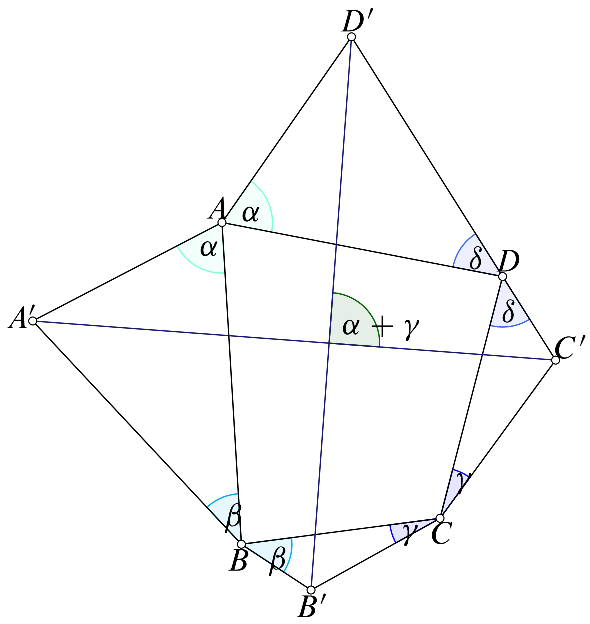
Mở rộng 8. *Cho A, B, C, D là bốn điểm bất kỳ. Vẽ các tam giác ABA', BCB', CDC' và DAD' sao cho*

$$\left(AA'; AB\right) = \left(AD; AD'\right) = \alpha \pmod{\pi}; \quad \left(BB'; BC\right) = \left(BA; BA'\right) = \beta \pmod{\pi};$$
$$\left(CC'; CD\right) = \left(CB; CB'\right) = \gamma \pmod{\pi}; \quad \left(DD'; DA\right) = \left(DC; DC'\right) = \delta \pmod{\pi};$$
$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = \pi \pmod{\pi}.$$

Chứng minh rằng

a) $(A'C'; B'D') = \alpha + \gamma \pmod{\pi}$.

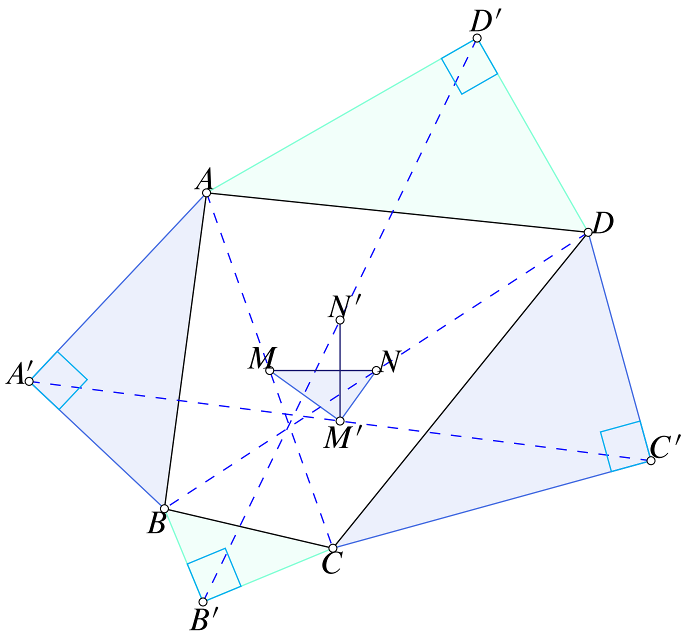
b) $\frac{A'C'}{B'D'} = \frac{\sin(\delta+\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)} = \frac{\sin(\beta+\gamma)}{\sin(\delta+\gamma)}$.



Mở rộng 9. *Cho A, B, C, D là bốn điểm bất kỳ, ABA' là tam giác vuông tại A'. Vẽ các tam giác CBB', CDC' và ADD' sao cho CBB' và ABA' đồng dạng ngược hướng; CDC' và ABA' đồng dạng cùng hướng; ADD' và ABA' đồng dạng ngược hướng. M, N, M', N' lần lượt là trung điểm của $AC, BD, A'C', B'D'$. Chứng minh rằng*

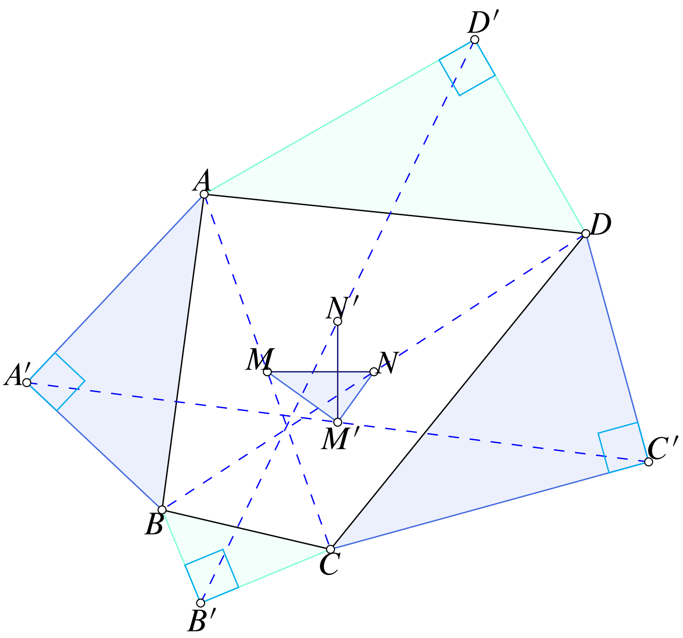
a) Tam giác MNM' và ABA' đồng dạng cùng hướng.

b) MN là trung trực của đoạn thẳng $M'N'$.

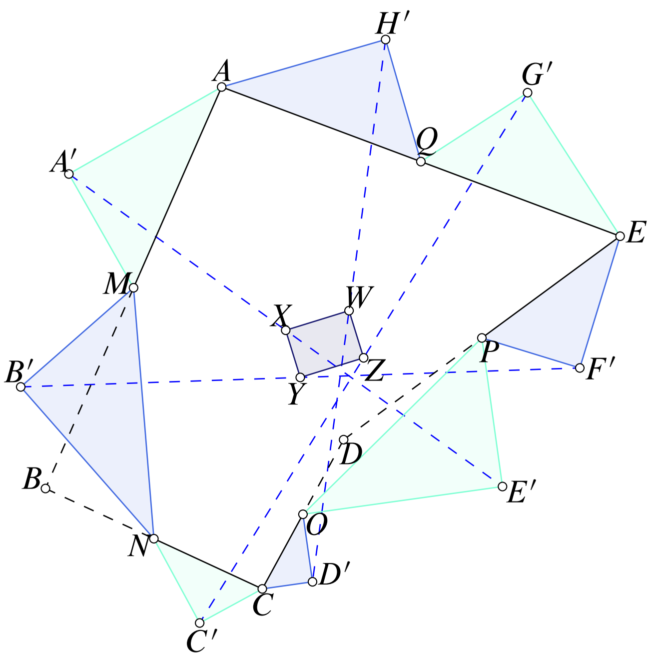


Mở rộng 10. *Cho năm điểm A, B, C, D, E tùy ý, M, N, O, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DE, EA, AMA' là tam giác vuông tại A'. Vẽ các tam giác NCC', OPE', EQG'*

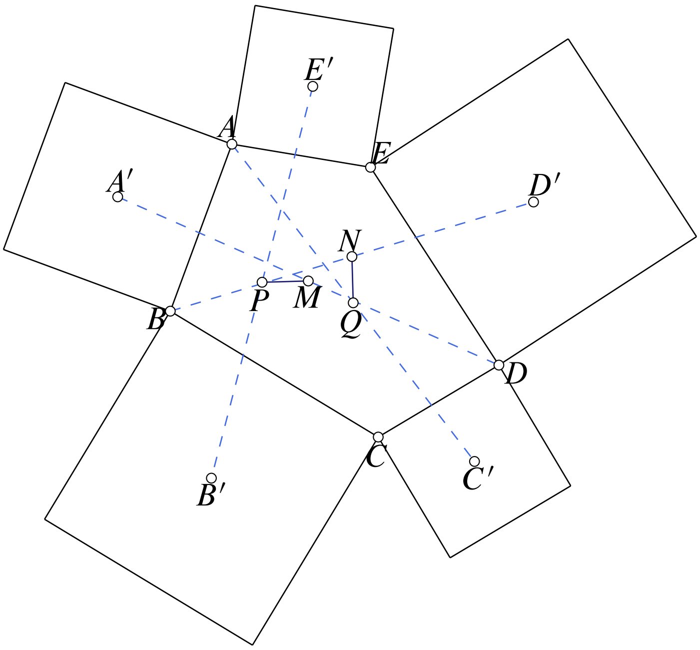
và AMA' đồng dạng cùng hướng. Vẽ các tam giác MNB', COD', PEF', QAH' đồng dạng cùng hướng đồng thời tam giác MNB' và AMA' đồng dạng ngược hướng. X, Y, Z, W lần lượt là trung điểm của $A'E'$, $B'F'$, $C'G'$, $D'H'$. Chứng minh rằng $XYZW$ là hình chữ nhật.



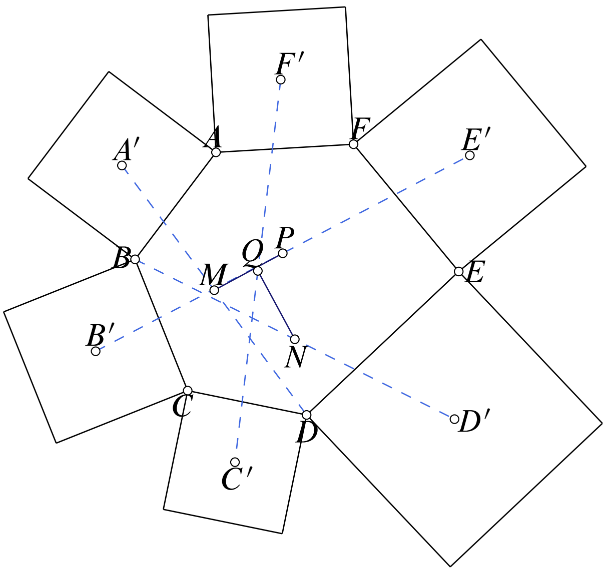
Mở rộng 11. *Cho ngũ giác $ABCDE$. Vẽ cùng bên ngoài (hoặc cùng bên trong) ngũ giác này các hình vuông có các cạnh lần lượt là AB, BC, CD, DE, EA và gọi tâm của các hình vuông tương ứng là A', B', C', D', E'. M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của $A'D$, BD', $B'E'$, AC'. Chứng minh rằng MP và NQ bằng nhau và vuông góc với nhau.*



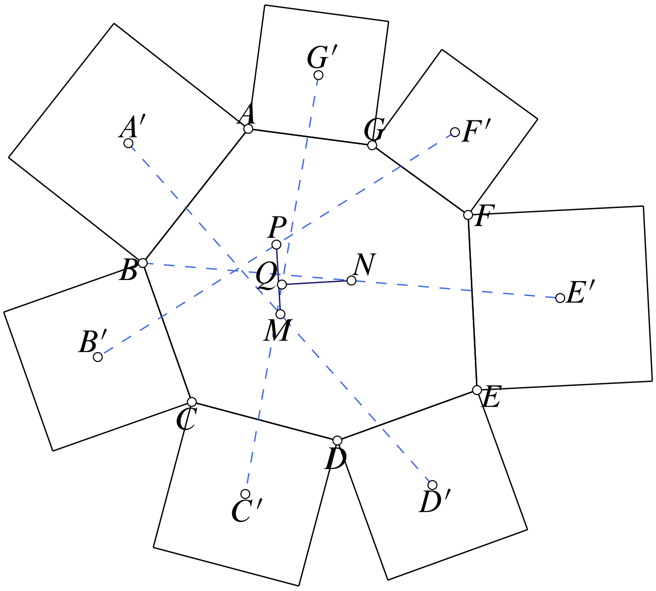
Mở rộng 12. *Cho ngũ giác $ABCDE$. Vẽ cùng bên ngoài (hoặc cùng bên trong) ngũ giác này các hình vuông có các cạnh lần lượt là AB, BC, CD, DE, EA và gọi tâm của các hình vuông tương ứng là A', B', C', D', E'. M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của $A'D, BD', B'E', AC'$. Chứng minh rằng MP và NQ bằng nhau và vuông góc với nhau.*



Mở rộng 13. *Cho lục giác $ABCDEF$. Vẽ cùng bên ngoài (hoặc cùng bên trong) lục giác này các hình vuông có các cạnh lần lượt là AB, BC, CD, DE, EF, FA và gọi tâm của các hình vuông tương ứng là A', B', C', D', E', F'. M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của $A'D, BD', B'E', C'F'$. Chứng minh rằng MP và NQ bằng nhau và vuông góc với nhau.*



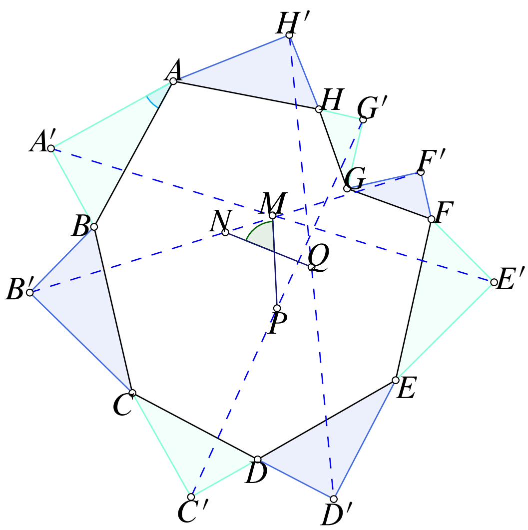
Mở rộng 14. *Cho thất giác $ABCDEFG$. Vẽ cùng bên ngoài (hoặc cùng bên trong) thất giác này các hình vuông có các cạnh lần lượt là $AB, BC, CD, DE, EF, FG, GA$ và gọi tâm của* *các hình vuông tương ứng là A', B', C', D', E', F', G'. M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của $A'D'$, BE', $B'F'$, $C'G'$. Chứng minh rằng MP và NQ bằng nhau và vuông góc với nhau.*



Mở rộng 15. *Cho tám điểm A, B, C, D, E, F, G, H tùy ý, ABA' là tam giác vuông tại A'. Vẽ các tam giác CDC', EFE', GHG' và ABA' đồng dạng cùng hướng. Vẽ các tam giác CBB', EDD', GFF', AHH' đồng dạng cùng hướng đồng thời tam giác CBB' và ABA' đồng dạng ngược hướng. M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của $A'E', B'F', C'G', D'H'$. Chứng minh rằng*

a) $MP = NQ$.

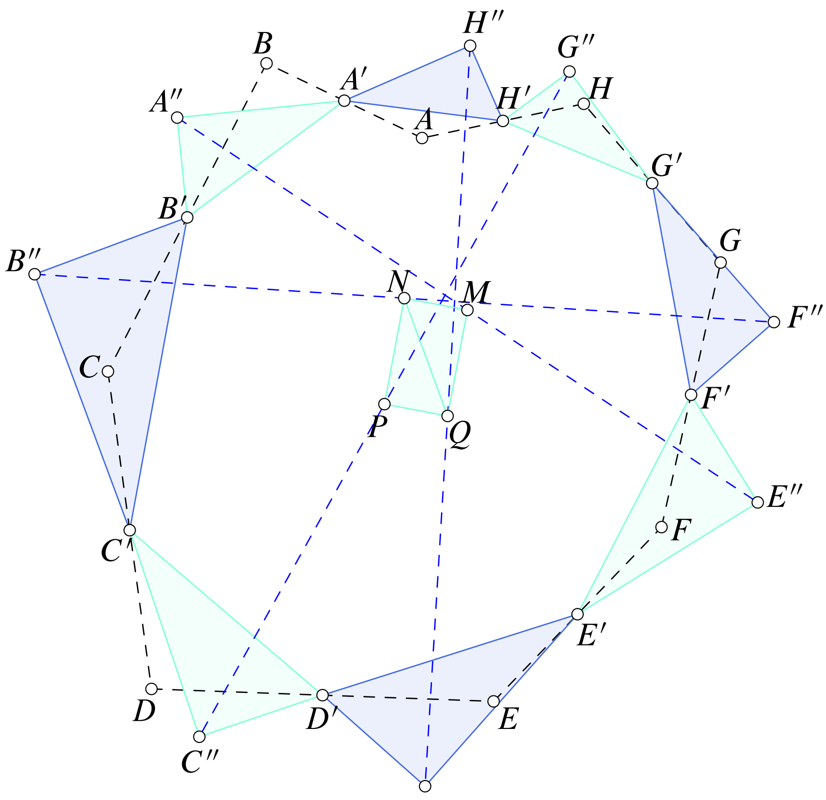
b) $(MP; NQ) = 2(AA'; AB) \pmod{\pi}$.



Mở rộng 16. *Cho tám điểm* A, B, C, D, E, F, G, H *tùy ý.* $A', B', C', D', E', F', G', H'$ *lần lượt là trung điểm của* $AB, BC, CD, DE, EF, FG, GH, HA$. *Tam giác* $A'B'A''$ *vuông tại* A''. *Vẽ các tam giác* $C'D'C''$, $E'F'E''$, $G'H'G''$ *và* $A'B'A''$ *đồng dạng cùng hướng. Vẽ các tam giác* $C'B'B''$, $E'D'D''$, $G'F'F''$, $A'H'H''$ *đồng dạng cùng hướng đồng thời tam giác* $C'B'B''$ *và* $A'B'A''$ *đồng dạng ngược hướng.* M, N, P, Q *lần lượt là trung điểm của* $A''E'', B''F'', C''G'', D''H''$. *Chứng minh rằng*

a) *Tam giác* QNM *và* $A'B'A''$ *đồng dạng cùng hướng.*

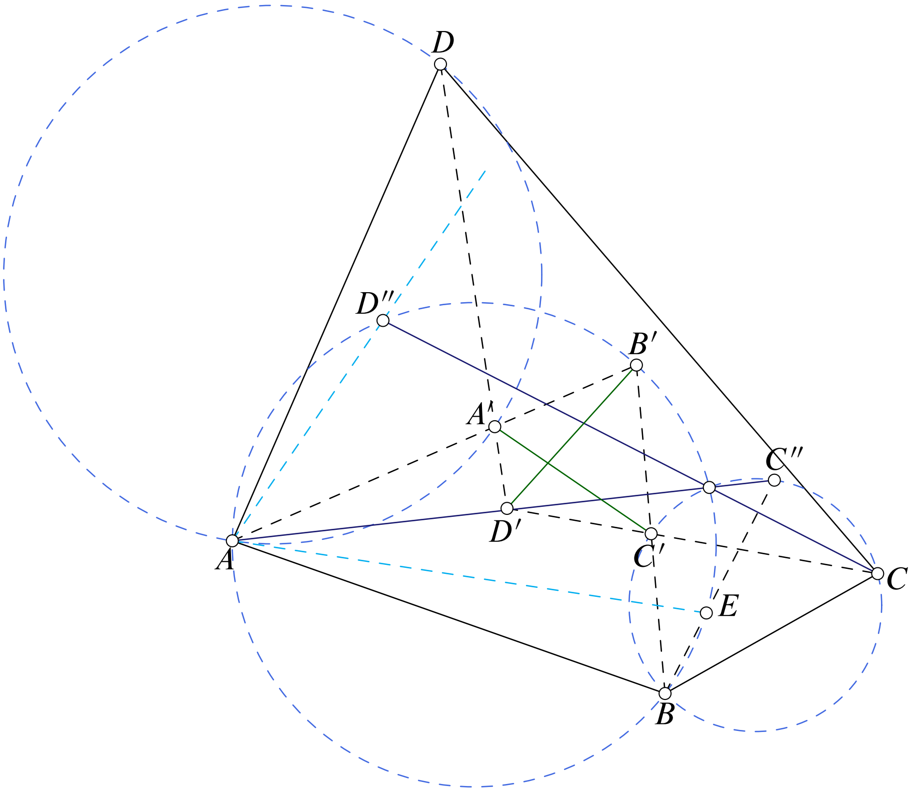
b) $MNPQ$ *là hình chữ nhật.*



Mở rộng 17. *Cho tứ giác lồi* $ABCD$. *Các đường phân giác trong của các góc* A, B, C, D *không trùng nhau và theo thứ tự cắt nhau tại* B', C', D', A'. *Tiếp tuyến tại* A *của đường tròn* (DAA') *cắt đường tròn* (ABB') *tại* E *(khác* A*). Đường thẳng* BE *cắt đường tròn* (BCC') *tại* C'' *(khác* B*). Đường thẳng đối xứng của* AE *qua* AA' *cắt* (ABB') *tại* D'' *(khác* A*). Chứng minh rằng*

a) AC'' *và* CD'' *cắt nhau tại một giao điểm của* (ABB') *và* (BCC').

b) $\frac{A'C'}{B'D'} = \frac{AC''}{CD''}$.



4. Áp dụng định lý Van Aubel vào giải một số bài toán liên quan đến tam giác

Bài toán 3. *Cho một tam giác $P_1P_2P_3$, P là một điểm ở trong tam giác đó; P_1P, P_2P, P_3P cắt các cạnh đối diện tại Q_1, Q_2, Q_3. Chứng minh rằng trong các tỉ số $\frac{P_1P}{PQ_1}, \frac{P_2P}{PQ_2}, \frac{P_3P}{PQ_3}$ có ít nhất một tỉ số không lớn hơn 2 và ít nhất một tỉ số không nhỏ hơn 2.*

Lời giải. Gọi G là giao điểm của ba đường trung tuyến. Ba trung tuyến P_1L, P_2M, P_3N chia tam giác $P_1P_2P_3$ thành sáu tam giác nhỏ $GP_1M, GP_1N, GP_2N, GP_2L, GP_3L, GP_3M$.

Không mất tính tổng quát, giả sử P nằm trong tam giác nhỏ GP_1M.

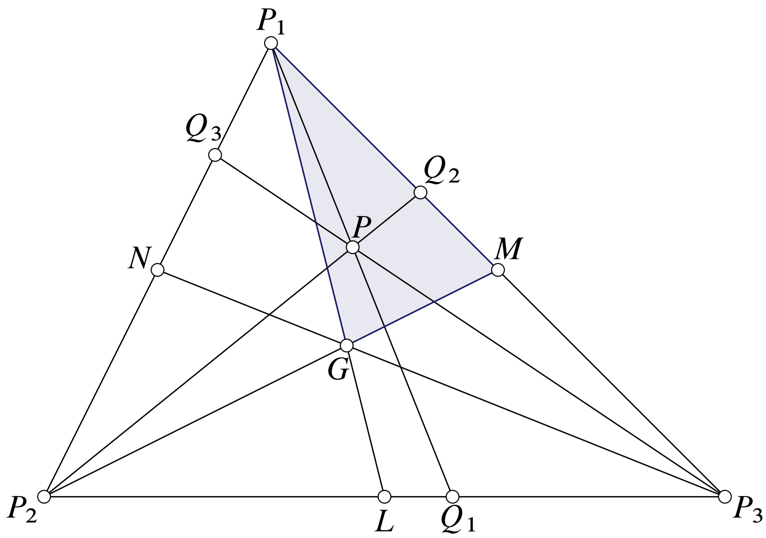
Áp dụng định lý *Van Aubel*, ta có

$$\frac{P_1P}{PQ_1} = \frac{P_1Q_2}{Q_2P_3} + \frac{P_1Q_3}{Q_3P_2} \leqslant 2 \text{ (vì } \frac{P_1Q_2}{Q_2P_3} \leqslant 1;\ \frac{P_1Q_3}{Q_3P_2} \leqslant 1).$$

Mặt khác, ta lại có

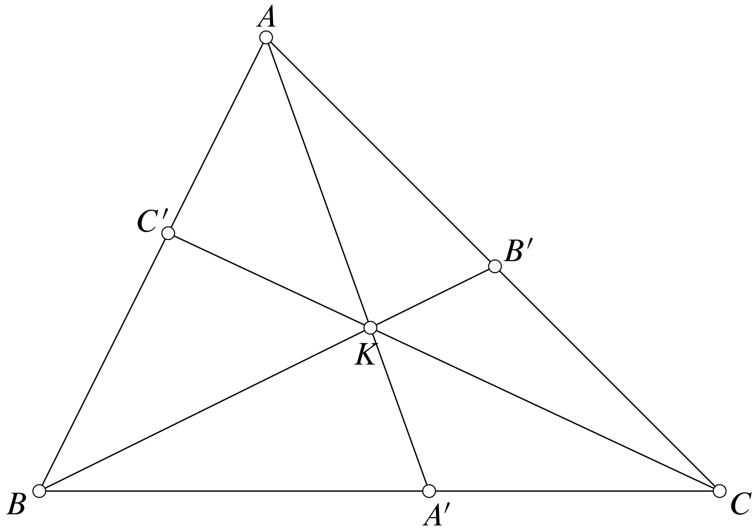
$$\frac{P_2P}{PQ_2} = \frac{P_2Q_3}{Q_3P_1} + \frac{P_2Q_1}{Q_1P_3} \geqslant 2.$$

Dấu bằng ở các biểu thức trên xảy ra khi $P \equiv G$ (khi P là trọng tâm của tam giác $P_1P_2P_3$).



Vậy ta suy ra được điều phải chứng minh. □

Bài toán 4. *Chứng minh rằng hiệu giữa tích ba tỉ số Céva và tổng của chúng là một hằng số, bằng* 2.



Lời giải. Đặt

$$\frac{AB'}{B'C} = m; \quad \frac{CA'}{A'B} = n; \quad \frac{BC'}{C'A} = t.$$

Áp dụng định lý *Van Aubel*, ta có

$$\frac{AK}{KA'} = \frac{AB'}{B'C} + \frac{AC'}{C'B} = m + \frac{1}{t};$$
$$\frac{BK}{KB'} = \frac{BC'}{C'A} + \frac{BA'}{A'C} = t + \frac{1}{n};$$
$$\frac{CK}{KC'} = \frac{CA'}{A'B} + \frac{CB'}{B'A} = n + \frac{1}{m}.$$

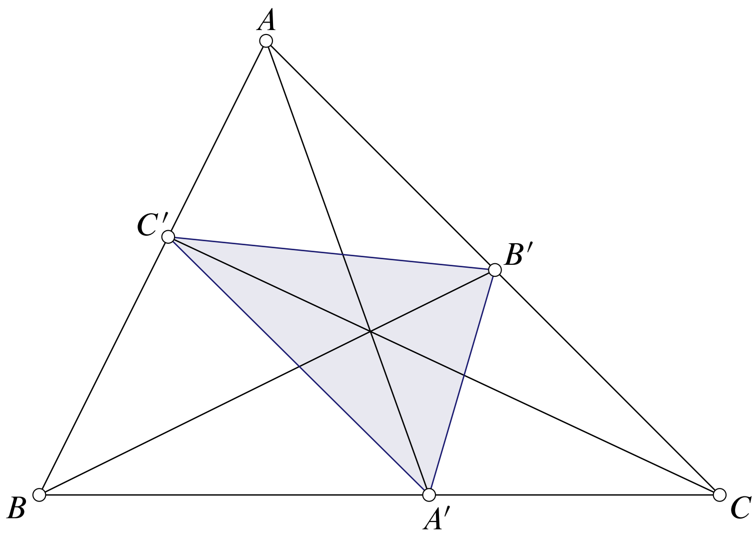
Tổng ba tỷ số
$$S = m + n + t + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{t}.$$

Tích ba tỷ số
$$P = \left(m + \frac{1}{t}\right)\left(t + \frac{1}{n}\right)\left(n + \frac{1}{m}\right) = mnt + \frac{1}{mnt} + m + n + t + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{t}.$$

Áp dụng định lý *Céva*, ta có
$$mnt = \frac{1}{mnt} = 1.$$

Vậy $P - S = 2$. □

Bài toán 5. *Xác định diện tích tam giác $A'B'C'$ có các đỉnh là chân của một bộ ba cevian cắt nhau trong một tam giác, theo diện tích S của tam giác ABC và các tỉ số*
$$\frac{AB'}{B'C} = m; \quad \frac{CA'}{A'B} = n; \quad \frac{BC'}{C'A} = t.$$



Lời giải. Ta có
$$S_{A'B'C'} = S\left(1 - \frac{S_{AB'C'}}{S} - \frac{S_{BA'C'}}{S} - \frac{S_{CA'B'}}{S}\right).$$

Theo bổ đề quen thuộc, ta có
$$\frac{S_{AB'C'}}{S} = \frac{AB'.AC'}{AC.AB} = \frac{AB'}{AB' + B'C}.\frac{AC'}{AC' + C'B} = \frac{m}{1+m}.\frac{1}{1+t}.$$

Tương tự,
$$\frac{S_{BA'C'}}{S} = \frac{t}{1+t}.\frac{1}{1+n}; \quad \frac{S_{CA'B'}}{S} = \frac{n}{1+n}.\frac{1}{1+m}.$$

Suy ra

$$\begin{aligned}
S_{A'B'C'} &= S\left[1 - \frac{m}{(1+m)(1+t)} - \frac{t}{(1+t)(1+n)} - \frac{n}{(1+n)(1+m)}\right] \\
&= S.\frac{1+mnt}{(1+m)(1+n)(1+t)} \\
&= \frac{2S}{(1+m)(1+n)(1+t)} \text{ (vì } mnt = 1).
\end{aligned}$$

□

Các trường hợp đặc biệt

1. Các *cevian* là các *cevian trọng tâm*:

$$m = n = t = 1;$$
$$S_{A'B'C'} = \frac{S}{4}.$$

2. Các *cevian* là các *cevian tâm đường tròn nội tiếp*:

$$m = \frac{c}{a}, \quad n = \frac{b}{c}, \quad t = \frac{a}{b};$$
$$S_{A'B'C'} = \frac{2Sabc}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

3. Các *cevian* là các *cevian trực tâm*:

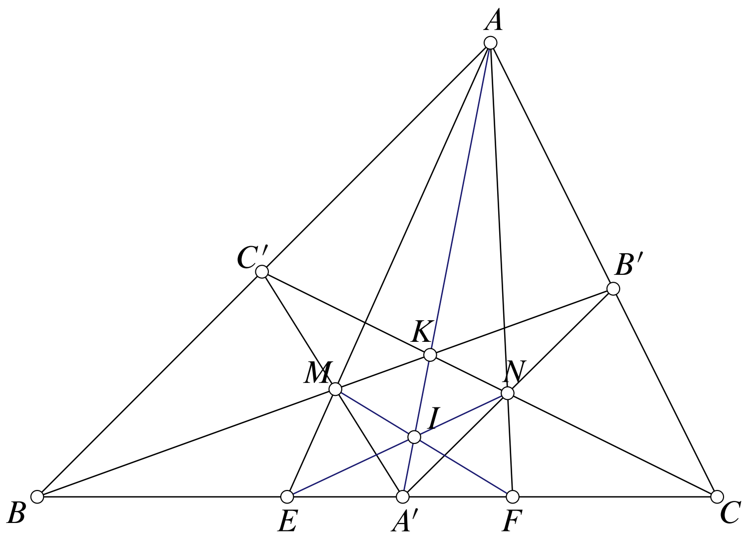
$$m = \frac{c\cos A}{a\cos C}, \quad n = \frac{b\cos C}{c\cos B}, \quad t = \frac{a\cos B}{b\cos A};$$
$$S_{A'B'C'} = \frac{2Sabc\cos A\cos B\cos C}{(b\cos A + a\cos B)(c\cos B + b\cos C)(a\cos C + c\cos A)};$$
$$S_{A'B'C'} = 2S\cos A\cos B\cos C.$$
(vì $c\cos B + b\cos C = a,\ a\cos C + c\cos A = b,\ b\cos A + a\cos B = c$).

4. Khi các *cevian* là các *cevian Gergonne*, các *cevian Nagle*, tính $S_{A'B'C'}$?

Bài toán 6. *Cho tam giác ABC, trên ba cạnh BC, CA, AB lần lượt lấy ba điểm A', B', C' sao cho AA', BB', CC' đồng quy tại K. Gọi N, M lần lượt là giao điểm của $A'B'$ và CC', $A'C'$ và BB'. Tia AM, tia AN lần lượt cắt BC tại E, F. Chứng minh rằng*

a) EN, FM, AA' *đồng quy tại* I.

b) $IA.KA' = 3IA'.KA$.



Lời giải. a) Áp dụng định lý *Menelaus* cho tam giác ABE với cát tuyến $A'MC'$, ta có

$$\frac{AM}{ME}\cdot\frac{EA'}{A'B}\cdot\frac{BC'}{C'A}=1\Rightarrow\frac{AM}{ME}=\frac{C'A}{BC'}\cdot\frac{A'B}{EA'}.$$

Áp dụng định lý *Menelaus* cho tam giác AFC với cát tuyến $A'NB'$, ta có

$$\frac{FN}{NA}\cdot\frac{AB'}{B'C}\cdot\frac{CA'}{A'F}=1\Rightarrow\frac{FN}{NA}=\frac{A'F}{CA'}\cdot\frac{B'C}{AB'}.$$

Theo định lý *Céva*, ta suy ra được

$$\frac{AM}{ME}\cdot\frac{EA'}{A'F}\cdot\frac{FN}{NA}=\left(\frac{C'A}{BC'}\cdot\frac{A'B}{EA'}\right)\cdot\frac{EA'}{A'F}\cdot\left(\frac{A'F}{CA'}\cdot\frac{B'C}{AB'}\right)=\frac{C'A}{BC'}\cdot\frac{A'B}{CA'}\cdot\frac{B'C}{AB'}=1.$$

Áp dụng định lý *Céva đảo*, ta có AA', EN, FM đồng quy tại I.

b) Áp dụng định lý *Van Aubel* cho tam giác ABA', ACA', AEF, ta có

$$\frac{AM}{ME}=\frac{AK}{KA'}+\frac{AC'}{C'B}; \quad (1)$$

$$\frac{AN}{NF}=\frac{AK}{KA'}+\frac{AB'}{B'C}; \quad (2)$$

$$\frac{AI}{IA'}=\frac{AM}{ME}+\frac{AN}{NF}. \quad (3)$$

Thay (1) và (2) vào (3) ta được

$$2\frac{AK}{KA'}+\frac{AC'}{C'B}+\frac{AB'}{B'C}=\frac{AI}{IA'}. \quad (4)$$

Áp dụng định lý *Van Aubel* cho tam giác ABC, ta có

$$\frac{AC'}{C'B} + \frac{AB'}{B'C} = \frac{AK}{KA'}.$$

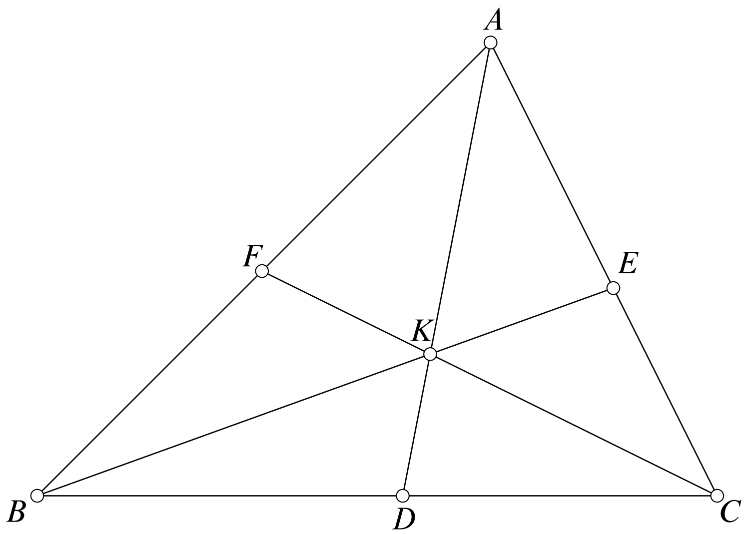
Thay vào (4) ta được

$$3\frac{AK}{KA'} = \frac{AI}{IA'} \Rightarrow 3IA'.AK = KA'.AI.$$

□

Bài toán 7. *Cho K là điểm nằm trong tam giác ABC. Gọi D, E, F lần lượt là giao điểm của AK và BC; BK và AC; CK và AB. Chứng minh rằng*

$$\frac{AK}{KD} + \frac{BK}{KE} + \frac{CK}{KF} \geqslant 6.$$



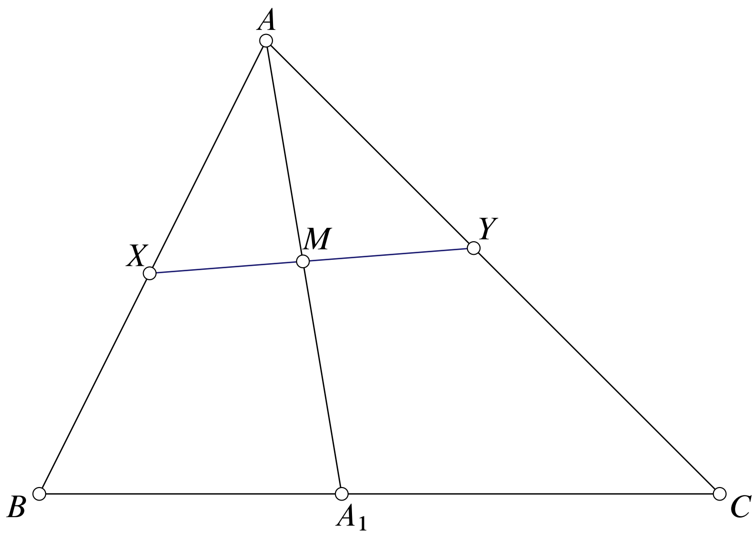
Lời giải. Áp dụng định lý *Van Aubel* cho tam giác ABC, ta có

$$\frac{AK}{KD} = \frac{AE}{EC} + \frac{AF}{FB}; \quad \frac{BK}{KE} = \frac{FB}{AF} + \frac{BD}{DC}; \quad \frac{KC}{FK} = \frac{EC}{AE} + \frac{DC}{BD}.$$

Cộng vế theo vế của các đẳng thức trên, ta được

$$\frac{AK}{KD} + \frac{BK}{KE} + \frac{KC}{FK} = \left(\frac{AE}{EC} + \frac{EC}{AE}\right) + \left(\frac{AF}{FB} + \frac{FB}{AF}\right) + \left(\frac{BD}{DC} + \frac{DC}{BD}\right) \underset{AM-GM}{\geqslant} 6.$$

Dấu bằng xảy ra khi E, F, D lần lượt là trung điểm của các cạnh CA, AB, BC (khi K là trọng tâm của tam giác ABC). □



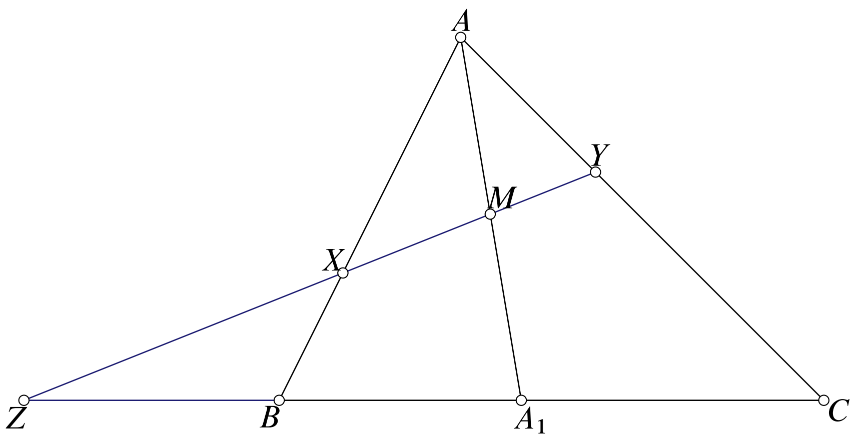
Bài toán 8. *Cho tam giác ABC, A_1 là điểm trên cạnh BC sao cho $\frac{A_1B}{A_1C} = \frac{\alpha}{\beta}$. Gọi X và Y lần lượt là các điểm trên cạnh AB và AC, M là giao điểm của đoạn thẳng XY với AA_1. Chứng minh rằng*

$$\alpha\frac{YC}{YA} + \beta\frac{XB}{XA} = (\alpha + \beta)\frac{A_1M}{MA}.$$

Lời giải. Đầu tiên giả sử rằng XY song song với BC. Khi đó

$$\frac{XB}{XA} = \frac{YC}{YA} = \frac{MA_1}{MA}$$

nên kết quả đúng với mọi β, γ.



Giả sử XY và BC cắt nhau tại Z.

Áp dụng định lý *Menelaus* cho tam giác AA_1B với cát tuyến MXZ, ta có

$$\frac{YC}{YA}.\frac{MA}{MA_1}.\frac{ZA_1}{ZC} = 1.$$

Suy ra

$$\begin{aligned}
\beta\frac{XB}{XA}+\gamma\frac{YC}{YA} &= \beta\frac{MA_1.ZB}{MA.ZA_1}+\gamma\frac{MA_1.ZC}{MA.ZA_1}\\
&= \frac{MA_1}{MA.ZA_1}(\beta ZB+\gamma ZC)\\
&= \frac{MA_1}{MA.ZA_1}(\beta ZA_1-\beta BA_1+\gamma ZA_1+\gamma A_1C)\\
&= (\beta+\gamma)\frac{MA_1}{MA.ZA_1}ZA_1 \text{ (vì } \frac{A_1B}{A_1C}=\frac{\gamma}{\beta})\\
&= (\beta+\gamma)\frac{MA_1}{MA}.
\end{aligned}$$

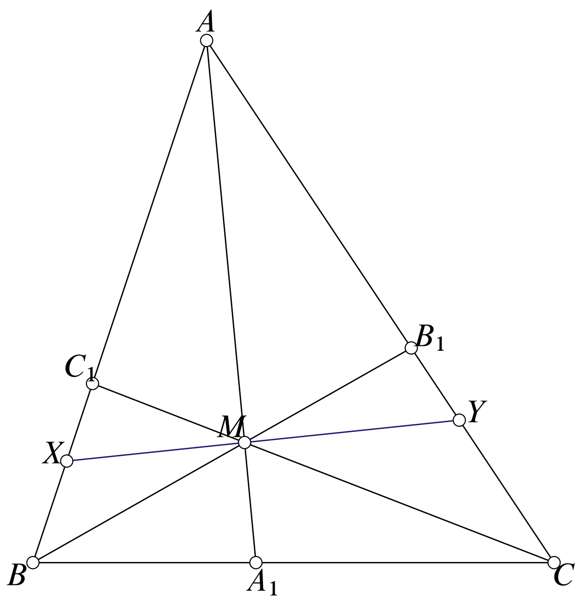
□

Bài toán 9. *Cho tam giác ABC có ba cevian AA_1, BB_1, CC_1 giao nhau tại M. Giả sử*

$$\frac{A_1B}{A_1C}=\frac{\gamma}{\beta};\quad \frac{B_1C}{B_1A}=\frac{\alpha}{\gamma};\quad \frac{C_1A}{C_1B}=\frac{\beta}{\alpha}.$$

Nếu X và Y lần lượt là hai điểm trên cạnh AB và AC thì M nằm trên đoạn XY khi và chỉ khi

$$\beta\frac{XB}{XA}+\gamma\frac{YC}{YA}=\alpha.$$



Lời giải. Áp dụng định lý *Van Aubel*, ta có

$$\frac{AM}{A_1M}=\frac{AC_1}{C_1B}+\frac{AB_1}{B_1C}=\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\beta+\gamma}{\alpha}.$$

Bây giờ giả sử M nằm trên đoạn XY. Theo *bài toán 8*, ta được

$$\beta\frac{XB}{XA}+\gamma\frac{YC}{YA}=(\beta+\gamma)\frac{A_1M}{MA}=(\beta+\gamma)\frac{\alpha}{\beta+\gamma}=\alpha.$$

Ngược lại, giả sử XY và AA_1 giao nhau tại M'. Ta sẽ chỉ ra M' trùng với M.

Theo *bài toán 8*, ta có

$$\beta\frac{XB}{XA}+\gamma\frac{YC}{YA}=(\beta+\gamma)\frac{A_1M'}{M'A}.$$

Theo giả thiết, ta có

$$\beta\frac{XB}{XA}+\gamma\frac{YC}{YA}=\alpha.$$

Do đó

$$\frac{A_1M}{AM}=\frac{\alpha}{\beta+\gamma}.$$

nên M và M' trùng nhau. Do đó M phải nằm trên đoạn XY. □

Hệ quả 6. *Nếu G là trọng tâm của tam giác ABC thì $\alpha=\beta=\gamma=1$, và G nằm trên đường thẳng XY khi và chỉ khi*

$$\frac{XB}{XA}+\frac{YC}{YA}=1.$$

Hệ quả 7. *Nếu I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC thì các giá trị của α,β và γ được xác định bằng độ dài các cạnh của tam giác*

$$\alpha=a;\quad \beta=b;\quad \gamma=c.$$

Do đó I nằm trên đường thẳng XY khi và chỉ khi

$$b\frac{XB}{XA}+c\frac{YC}{YA}=a.$$

Hệ quả 8. *Nếu H là trực tâm của tam giác ABC thì tỉ số các cạnh được xác định bởi*

$$\alpha=\tan\angle BAC;\quad \beta=\tan\angle ABC;\quad \gamma=\tan\angle ACB.$$

Khi đó H nằm trên đường thẳng XY khi và chỉ khi

$$\frac{XB}{XA}\tan\angle ABC+\frac{YC}{YA}\tan\angle ACB=\tan\angle BAC.$$

Bài tập rèn luyện

Bài tập 4. Nếu ba đường thẳng AA', BB', CC' cắt nhau tại một điểm K nằm trong tam giác ABC thì
$$\frac{KA'}{AA'}+\frac{KB'}{BB'}+\frac{KC'}{CC'}=1 \text{ và } \frac{AK}{AA'}+\frac{BK}{BB'}+\frac{CK}{CC'}=2.$$
Bài tập 5. Từ các đỉnh A, B, C của một tam giác ABC, kẻ các đường thẳng lần lượt song song với các cạnh $B'C', C'A', A'B'$ của tam giác $A'B'C'$. Chứng minh rằng nếu các đường thẳng này đồng quy thì các đường thẳng kẻ từ A', B', C' và theo thứ tự song song với BC, CA, AB cũng đồng quy.

Bài tập 6. Trên ba cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC lần lượt lấy ba điểm H, M, N sao cho ba đoạn thẳng AH, BM, CN đồng quy tại G. Gọi P, Q lần lượt là giao điểm của HN và BM, HM và CN. Tia AP và tia AQ cắt cạnh BC lần lượt tại E và F. Chứng minh rằng
$$\frac{AP}{PE}+\frac{AQ}{QF}=3\left(\frac{AN}{NB}+\frac{AM}{MC}\right).$$

Khi G là trung điểm AH, tính $\frac{AP}{PE}+\frac{AQ}{QF}$.

Bài tập 7. (Intervarsity Ireland 2006) Cho tam giác ABC, X và Y lần lượt là các điểm trên cạnh AB và AC sao cho đường thẳng XY chia đôi diện tích tam giác, các điểm X và Y chia đôi chu vi tam giác ABC. Chứng minh rằng tâm đường tròn nội tiếp I nằm trên đoạn XY.

Tài liệu tham khảo

[1] BÀI TOÁN HAY - LỜI GIẢI ĐẸP - ĐAM MÊ TOÁN HỌC
https://www.facebook.com/groups/652284361511408.

[2] MATH WARS PROJECT
https://www.facebook.com/Math-Wars-Project-108594537589543.

[3] NGUYỄN ĐÌNH HUY (2018), *Định lý Van Aubel và ứng dụng trong việc giải một số bài toán hình học dành cho học sinh giỏi*, Luận văn Thạc sĩ toán học, Trường Đại học Thái Nguyên.

[4] NGUYỄN NGỌC GIANG (2015) , *Sáng tạo với định lí van Aubel*, TP. Hồ Chí Minh.

[5] TRẦN XUÂN BANG, *Đường tròn bàng tiếp trong tam giác*, Trường THPT Chuyên Quảng Bình.

[6] YUTAKA NISHIYAMA (2011), *The beautiful geometric theorem of Van Aubel*, International Journal of Pure and Applied Mathematics, 66(1), 71-80.

ỨNG DỤNG CỦA TRƯỜNG HỮU HẠN VÀO GIẢI BÀI TOÁN DÃY SỐ

Dương Thái Bảo

Trường THPT Chuyên Nguyễn Quang Diêu, Đồng Tháp

GIỚI THIỆU

Sự khác biệt lớn nhất giữa tập số nguyên và tập số hữu tỉ hay số thực là ở chỗ **phép chia**. Bản chất của phép chia là phải có nghịch đảo. Rộng ra hơn một tí, chúng còn sự khác biệt ở phép toán lấy căn bậc hai. Chính vì phép chia và phép lấy căn không thực hiện được (chỉ một vài trường hợp đặc biệt như nghịch đảo của ± 1 hay căn bậc hai của số chính phương) nên khi gặp một số bài toán dãy số mà ở đó công thức tổng quát có chứa căn chúng ta lại không thể sử dụng đồng dư. Những trở ngại này buộc chúng ta đưa bài toán từ xét trên tập số nguyên về trường hữu hạn $\mathbb{Z}_p$ hay trường mở rộng $\mathbb{Z}_p[\sqrt{d}]$ với d không thặng dư chính phương modulo p. Thế nhưng trong bài viết này chúng ta cũng sẽ tiếp cận theo hướng dẫn dắt học sinh (đối tượng chưa được học về các khái niệm nhóm, vành, trường) nắm được tinh thần của trường hữu hạn.

1. Trường hữu hạn $\mathbb{Z}_p$

Bây giờ ta xét $n > 1$ là số nguyên và tập

$$\mathbb{Z}_n = \{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{n-1}\}^1.$$

Tập trên cũng có thể hiểu là hệ thặng dư đầy đủ modulo n. Lấy $x, y \in \mathbb{Z}_n$, ta định nghĩa

- $x \pm y = z$ với z là số dư của $x \pm y$ khi chia cho n.
- $xy = z$ với z là số dư của xy khi chia cho n.

[1] Ở một số tài liệu vẫn kí hiệu $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$

Cách định nghĩa các phép toán này hoàn toàn dựa trên phép toán của đồng dư. Hơn nữa, $x \pm y, xy \in \mathbb{Z}_n$ với mọi $x, y \in \mathbb{Z}_n$ - *tính chất đóng*. Lúc này tập $\mathbb{Z}_n$ cùng với hai phép toán "+" và "$\times$" được gọi là *vành* $\mathbb{Z}_n$. Bạn đọc hãy thử so sánh giữa $\mathbb{Z}$ và $\mathbb{Z}_n$. Mỗi người sẽ có một sự so sánh khác nhau, tuy nhiên chúng ta sẽ có cảm nhận $\mathbb{Z}_n$ như một sự phân hoạch $\mathbb{Z}$ thành n lớp: i là lớp các số chia n dư i. Do đó thay vì làm việc trên toàn bộ tập $\mathbb{Z}$ ta chỉ cần làm việc với số đại diện $0, 1, \ldots, n-1$.

Tập $\mathbb{Z}$ có một "điểm yếu": mỗi số thuộc $\mathbb{Z}$ không có nghịch đảo, chẳng hạn phương trình $ax = 1$ vô nghiệm trên $\mathbb{Z}$ nếu $a \neq \pm 1$. Bản thân $\mathbb{Z}_n$ cũng chẳng khá hơn: với $n = 6$, số 4 không có nghịch đảo trong $\mathbb{Z}_6$ vì phương trình $4x \equiv 1 \pmod 6$ vô nghiệm. Trái lại, 5 có nghịch đảo là 5 vì $5 \times 5 \equiv 1 \pmod 6$. Khái niệm nghịch đảo hoàn toàn giống như khái niệm nghịch đảo theo modulo n. Vì thế số phần tử khả nghịch trong $\mathbb{Z}_n$ là $\varphi(n)$.

Chúng ta biết rằng $\varphi(n) \leqslant n-1$, dấu "=" chỉ xảy ra khi và chỉ khi n là số nguyên tố. Khi n là một số nguyên tố thì ta nói $\mathbb{Z}_n$ là *trường* $\mathbb{Z}_n$ - *mọi số khác không đều khả nghịch*. Xét p là số nguyên tố, lấy $x, y \in \mathbb{Z}_p$ với $y \neq 0$, ta định nghĩa *"phép chia"* như sau: $\frac{x}{y} = z$ với z là tích của x với nghịch đảo của y (theo mod p). Ở đây $y \neq 0$ ta có thể hiểu là p y, do đó y có nghịch đảo.

Sau khi mô tả được tập $\mathbb{Z}_p$ có hai phép toán cơ bản là cộng và nhân, chúng ta sẽ nói thêm một tí về việc chuyển khái niệm trên $\mathbb{Z}$ sang khái niệm trên $\mathbb{Z}_p$: với $a \in \mathbb{Z}$, khi đó

- $p \mid a$ khi và chỉ khi $a = 0$ trên $\mathbb{Z}_p$.
- $a \equiv b \pmod p$ khi và chỉ khi $a = b$ trên $\mathbb{Z}_p$.
- a là thặng dư chính phương modulo p khi và chỉ khi tồn tại $x \in \mathbb{Z}_p$ thỏa $a = x^2$.
- p a khi và chỉ khi tồn tại $a' \in \mathbb{Z}_p$ sao cho $aa' = 1$ (a' cũng chính là nghịch đảo theo modulo p).

Nghiệm nguyên thủy g của modulo p có tính chất

$$\{g, g^2, \ldots, g^{p-1}\}$$

là hệ thặng dư thu gọn mod p. Điều này viết lại thành

Định lý 1. *Tồn tại một số $x \in \mathbb{Z}_p^*$ sao cho*

$$\mathbb{Z}_p^* = \{x, x^2, \ldots, x^{p-1}\}.$$

Số x ở đây còn được gọi là *phần tử sinh* của $\mathbb{Z}_p^*$.

Ví dụ 1 (VMO 2011). *Cho dãy số $\{a_n\}$ thỏa mãn*

$$\begin{cases} a_0 = 1, a_1 = -1 \\ a_n = 6a_{n-1} + 5a_{n-1}, \quad \forall n \geqslant 0. \end{cases}$$

Chứng minh rằng $a_{2011} - 2010 \,\vdots\, 2011$.

Bài toán hoàn toàn có thể giải dựa vào công thức tổng quát của dãy

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(7-2\sqrt{14})(3+\sqrt{14})^n + (7+2\sqrt{14})(3-\sqrt{14})^n}{14} \\ &= \frac{(-7+\sqrt{14})(3+\sqrt{14})^{n-1} - (7+\sqrt{14})(3-\sqrt{14})^{n-1}}{14} \\ &= -u_n + 2v_n \end{aligned}$$

với

$$u_n = \frac{(3+\sqrt{14})^{n-1} + (3-\sqrt{14})^{n-1}}{2}, v_n = \frac{(3+\sqrt{14})^{n-1} - (3-\sqrt{14})^{n-1}}{2\sqrt{14}}.$$

Từ đây xét đồng dư theo từng dãy $\{u_n\}$ và $\{v_n\}$.

Công việc trên có điểm chưa hay là việc tách u_n và v_n, hơn nữa việc tổng quát của bài toán sẽ khó khăn. Bây giờ ta sẽ xét dãy $\{a_n\}$ trên trường $\mathbb{Z}_p$. Ấy thế, để cho người đọc dễ dàng tiếp cận, chúng ta sẽ viết dưới dạng đồng dư.

Xét phương trình đồng dư $X^2 - 6X - 5 \equiv 0 \pmod p$, khi đó $(X-3)^2 \equiv 14 \pmod p$. Ta dễ dàng kiểm tra được 14 là thặng dư bậc hai modulo p (dùng tính chất của kí hiệu Legendre). Tức là tồn tại $a \in \{1, \ldots, \frac{p-1}{2}\}$ sao cho $a^2 \equiv 14 \pmod p$. Lúc này phương trình đang xét có hai nghiệm

$$\left[\begin{array}{l} X \equiv 3 + a \pmod p \\ X \equiv 3 + a \pmod p \end{array}\right. .$$

Tiếp theo ta xét dãy $\{X_n\}$ thỏa $X_n = c_1(3+a)^n + c_2(3-a)^n$ với mọi $n \geqslant 0$, trong đó c_1, c_2 là hai số nguyên ta sẽ chọn để

$$\begin{cases} X_0 \equiv 1 \pmod p \\ X_1 \equiv -1 \pmod p \end{cases}.$$

Giải hệ này ta được

$$\begin{cases} c_1 \equiv \frac{a-4}{2a} \pmod p \\ c_2 \equiv \frac{a+4}{2a} \pmod p \end{cases}$$

Bằng qui nạp ta dễ dàng chứng minh được rằng

$$X_{n+2} \equiv 6X_{n+1} + 5X_n \pmod p \quad \text{và} \quad a_n \equiv X_n \pmod p, \quad \forall n \geqslant 0.$$

Tuy nhiên, ta có

$$\begin{aligned} X_p &= c_1(3+a)^p + c_2(3-a)^p \\ &\equiv c_1(3+a) + c_2(s-a) \pmod p \\ &\equiv \frac{(a-4)(3+a)}{2a} + \frac{(a+4)(3-a)}{2d} \pmod p \\ &\equiv -1 \pmod p. \end{aligned}$$

Vậy $a_p - (p-1)$ chia hết cho p.

Trong ý tưởng thực hiện lời giải trên, cách tìm dãy $\{X_n\}$ thực ra là chúng ta đang tìm $\{a_n\}$ trên trường $\mathbb{Z}_p$. Lúc này có một điều thú vị $\sqrt{14}$ không là số nguyên tuy nhiên nó lại "tồn tại" trong $\mathbb{Z}_p$! Vậy trong $\mathbb{Z}_n$ có căn bậc m của một số nguyên? Xét $n, m > 1$ là hai số nguyên.

Định nghĩa 1. *Cho a là số nguyên, nếu phương trình đồng dư $X^m \equiv a \pmod n$ có nghiệm thì ta nói a có căn bậc m trong $\mathbb{Z}_n$. Kí hiệu $\sqrt[m]{a}$ là một căn bậc m của a theo mod n.*

Nhận xét 1. Cho p là số nguyên tố, khi đó nếu a là thặng dư chính phương mod p thì a có căn bậc hai trong $\mathbb{Z}_p$. Ngược lại a không có căn bậc hai.

Việc dùng kí hiệu căn ở đây là dạng hình thức. Tuy nhiên các tính chất của mũ trong $\mathbb{Z}_n$ có thể thực hiện như trong tập số thực. Điển hình nhất, ở ví dụ trên, việc kí hiệu $\frac{a+4}{2a}$ chỉ là hình thức. Chúng ta phải hiểu đó là tích của $a+4$ với nghịch đảo của $2a$ theo mod p. Việc tương đồng về phép toán giữa tập số hữu tỉ và $\mathbb{Z}_p$ cho phép chúng ta viết như thế.

Chúng ta biết rằng số nguyên a làm cho phương trình $X^2 \equiv a \pmod p$ với p là số nguyên tố, có nghiệm thì a được gọi là thặng dư chính phương. Tuy nhiên ở khía cạnh ngược lại, nghiệm của phương trình này thì chưa được khai thác nhiều.

Ví dụ 2 (VMO 2020). *Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_1 = 5, a_2 = 13$ và*

$$a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n \text{ với mọi } n \geqslant 2$$

Chứng minh rằng nếu p là ước nguyên tố của a_{2^k} thì $p-1$ chia hết cho 2^{k+1} với mọi số tự nhiên k.

Ví dụ 3. *Cho k là số nguyên dương và dãy số $\{x_n\}$ thỏa*

$$\begin{cases} x_0 = 1, x_1 = 3 \\ x_{n+2} = 6x_{n+1} - x_n, \quad \forall n \geqslant 0 \end{cases}.$$

Gọi p là ước nguyên tố lẻ của x_{2^k}. Chứng minh rằng *a) 2 là thặng dư chính phương mod p.*

b) 2^{k+3} là ước của $p-1$.

Trong hai bài này thì bài sau khó hơn ở chỗ phương trình đặc trưng cho nghiệm vô tỉ. Tuy nhiên chúng ta vẫn có cách khắc phục để lời giải bài sau **không khác gì mấy** lời giải bài trước.

Lời giải. Ta có công thức tổng quát của dãy số

$$x_n = \frac{(1+\sqrt{2})^{2n} + (1-\sqrt{2})^{2n}}{2}, \quad \forall n \geqslant 0.$$

Từ đây ta có

$$2x_{2^{k-1}}^2 = 1 + x_{2^k}^2 \equiv 1 \pmod p$$

suy ra 2 là thặng dư chính phương mod p.

Xét phương trình đồng dư $X^2 - 6X + 1 \equiv 0 \pmod p$, khi đó $(X-3)^2 \equiv 8 \pmod p$. Do 2 cũng là thặng dư chính phương mod p nên tồn tại số nguyên a để $a^2 \equiv 2 \pmod p$. Lúc này nghiệm của phương trình là

$$\left[\begin{array}{ll} X \equiv 3+2a & \pmod p \\ X \equiv 3-2a & \pmod p \end{array}\right. .$$

Chú ý rằng $(a+1)^2 = a^2 + 2a + 1 \equiv 3 + 2a \pmod p$, tương tự ta có $(a-1)^2 \equiv 3 - 2a \pmod p$.

Xét dãy $\{X_n\}$ thỏa $X_n = c_1(1+a)^{2n} + c_2(1-a)^{2n}$ với mọi $n \geqslant 0$, trong đó c_1, c_2 là hai số nguyên thỏa

$$\begin{cases} c_1 + c_2 \equiv 1 \pmod p \\ c_1(3+2a) + c_2(3-2a) \equiv 3 \pmod p \end{cases}$$

hay

$$\begin{cases} c_1 \equiv \frac{1}{2} \pmod p \\ c_2 \equiv \frac{1}{2} \pmod p \end{cases} .$$

Gọi c là nghịch đảo của 2 theo mod p, $x = 1 + a$ và $y = 1 - a$. Ta có

$$X_n = c\left(x^{2n} + y^{2n}\right), \quad \forall n \geqslant 0.$$

Dễ dàng nhận thấy $X_{n+1} = 6X_{n+1} - X_n$ và $x_n \equiv X_n \pmod p$ với mọi $n \geqslant 0$.

Đặt $h = \operatorname{ord}_p(x)$, vì $x^2y^2 \equiv 1 \pmod p$ nên

$$X_{2^k} \equiv 0 \pmod p \Leftrightarrow x^{2^{k+1}} + y^{2^{k+1}} \equiv 0 \pmod p \Leftrightarrow x^{2^{k+2}} \equiv -1 \pmod p$$

suy ra

$$x^{2^{k+3}} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Rõ ràng $h \mid 2^{k+3}$, nếu $h = 2^t$ với $t \leqslant k+2$ thì do $x^{2^t} \equiv 1 \ (p)$ nên ta cứ bình phương s lần để được $t+s = k+2$, lúc này ta có điều mâu thuẫn. Vậy $h = 2^{k+3}$. □

2. Trường hữu hạn $\mathbb{F}_{p^2}$

Xét p là số nguyên tố lẻ và số nguyên dương d không là thặng dư chính phương modulo p. Đặt

$$\mathbb{F}_{p^2} := \mathbb{Z}_p[\sqrt{d}] = \{a + b\sqrt{d} : a, b \in \mathbb{Z}_p\}.$$

rõ ràng $\mathbb{Z}_p[\sqrt{d}]$ có đúng p^2 phần tử. Chúng ta định nghĩa các phép toán trên $\mathbb{F}_{p^2}$ như sau: $x = a + b\sqrt{d}, y = m + n\sqrt{d} \in \mathbb{F}_{p^2}$

- $x = y$ khi và chỉ khi $a = m, b = n$.
- $x \pm y = a \pm m + (b \pm n)\sqrt{d}$.
- $xy = am + bnd + (an + bm)\sqrt{d}$

Từ định nghĩa này chúng ta thấy rằng: với mọi $x, y \in \mathbb{F}_{p^2}$ thì

∘ $x \pm y \in \mathbb{F}_{p^2}$.

∘ $xy \in \mathbb{F}_{p^2}$.

Lúc này xét $x \in \mathbb{F}^*_{p^2}$, tức là tồn tại $a, b \in \mathbb{Z}_p$ không đồng thời bằng 0 sao cho $x = a + b\sqrt{d}$. Khi đó $a^2 - db^2 \in \mathbb{Z}^*_p$. Thật vậy, nếu $a^2 - db^2 \equiv 0 \pmod{p^2}$ thì $a^2 - db^2 \equiv 0 \pmod{p}$. Nếu $b = 0$ thì suy ra $a = 0$ (mâu thuẫn với $x \neq 0$), do đó $b \neq 0$. Vì thế ta có

$$d \equiv \left(ab^{-1}\right)^2 \pmod{p}$$

Điều này mâu thuẫn với giả thiết d không là thặng dư chính phương. Tiếp đến ta xét

$$y = \left(a^2 - db^2\right)^{-1}(a - b\sqrt{d}) \in \mathbb{F}^*_{p^2}$$

suy ra $xy = 1$. Điều này chứng tỏ nếu $x \neq 0$ thì x luôn có nghịch đảo trong $\mathbb{F}_{p^2}$. Điều này giúp cho $\mathbb{F}_{p^2}$ có tính chất hoàn toàn tương tự như $\mathbb{Z}_p$, vì thế nó cũng được gọi là trường.

Trong $\mathbb{Z}_p$, mọi số khác 0 đều có cấp và cấp của nó là ước của $p-1$. Lấy bất kì $x \in \mathbb{F}^*_{p^2}$, xét dãy

$$x, x^2, \ldots, x^{p^2-1}.$$

lúc này các số trên đều thuộc $\mathbb{F}^*_{p^2}$. Nếu tồn tại $x^n = 1$ thì ta chọn ra số n bé nhất thỏa mãn điều này. Ngược lại, tồn tại $n < m$ sao cho $x^m = x^n$, kéo theo theo $x^{m-n} = 1$. Vì thế ta sẽ luôn chọn được số nguyên dương bé nhất để $x^n = 1$, rõ ràng $n \leqslant p^2 - 1$.

Định nghĩa 2. *Số nguyên dương bé nhất thỏa mãn $x^n = 1$ thì được gọi là bậc của x trong $\mathbb{F}^*_{p^2}$. Kí hiệu* $\operatorname{ord}(x)$.

Gọi $h = \operatorname{ord}(x)$, lúc này tồn tại q, r với $0 \leqslant r < h$ sao cho $p^2 - 1 = hq + r$. Khi đó

$$1 = x^{p^2-1} = x^{hq+r} = (x^h)^q.x^r = x^r$$

suy ra $r = 0$.

Mệnh đề 1. *Cấp của mọi phần tử khác 0 đều là ước của $p^2 - 1$ và $x^{p^2-1} = 1$ với mọi $x \in \mathbb{F}^*_{p^2}$.*

Mệnh đề 2. *Cho $x \in \mathbb{F}^*_{p^2}$ và $k > 1$ là số nguyên dương*

$$\operatorname{ord}(x^k) = \frac{\operatorname{ord}(x)}{\gcd(\operatorname{ord}(x), k)}.$$

Chứng minh. Để thuận tiện cho chứng minh, ta kí hiệu

$$t = \operatorname{ord}(x) \quad \text{và} \quad d = \gcd(\operatorname{ord}(x), k),$$

khi đó

$$(x^k)^{\frac{t}{d}} = \left(x^t\right)^{\frac{k}{d}} = 1.$$

Đặt $t' = \operatorname{ord}(x^k)$, lúc này ta có $x^{kt'} = 1$ suy ra

$$t' \,\Big|\, \frac{t}{d} \tag{1}$$

Mặt khác khác vì $x^{kt'} = (x^k)^{t'} = 1$ nên $t \mid kt'$ suy ra

$$\frac{t}{d} \,\Big|\, \frac{k}{d} t'.$$

Vì

$$\gcd\left(\frac{t}{d}, \frac{k}{d}\right) = 1$$

nên

$$\frac{t}{d} \,\Big|\, t'. \tag{2}$$

Từ (1) và (2) ta có $t' = \frac{t}{d}$. □

Từ tính chất này ta thấy $\operatorname{ord}(x^k) = \operatorname{ord}(x)$ khi và chỉ khi $\gcd(k, d) = 1$.

Mệnh đề 3. *Cho $x \in \mathbb{F}^*_{p^2}$ có cấp là d, khi đó x^k có cấp là d khi và chỉ khi* $\gcd(k, d) = 1$.

Mọi phần tử của $\mathbb{Z}_p$ đều có thể biểu diễn thành lũy thừa của nghiệm nguyên thủy. Bây giờ chúng ta cũng sẽ đi tìm một số thuộc $\mathbb{F}^*_{p^2}$ có tính chất tương tự như nghiệm nguyên thủy.

Gọi $\psi(d)$ là tập hợp các phần tử thuộc $\mathbb{F}^*_{p^2}$ mà có cấp là d. Chú ý rằng mỗi phần tử thuộc $\mathbb{F}^*_{p^2}$ đều thuộc đúng một $\psi(d)$, suy ra

$$\sum_{0<d\,|\,p^2-1} \psi(d) = p^2 - 1.$$

Nếu x có cấp là d thì tất cả

$$x, x^2, \ldots, x^d$$

đều phân biệt và có cấp là d. Nói cách khác, tất cả đều là nghiệm của phương trình $X^d = 1$, mà phương trình này chỉ có tối đa d nghiệm nên dãy trên là tất cả các nghiệm của phương trình. Nếu $a \neq x$ cũng có cấp là d thì a là nghiệm của phương trình $X^d = 1$, suy ra tồn tại k để $a = x^k$. Theo tính chất trên thì $\gcd(k, d) = 1$. Vậy số phần tử có cấp là d bằng $\varphi(d)$, suy ra

$$\psi(d) = \varphi(d)$$

với mọi ước d của $p^2 - 1$. Vậy $\psi(p^2 - 1) = \varphi(p^2 - 1)$.

Mệnh đề 4. *Tồn tại $x \in \mathbb{F}^*_{p^2}$ để* $\operatorname{ord}(x) = \varphi(p^2 - 1)$. *Nói cách khác, mọi phần tử thuộc $\mathbb{F}^*_{p^2}$ đều được biểu diễn thành một lũy thừa của x.*

Ví dụ 4 (IMO SL 2003). *Cho dãy số a_0, a_1, a_2, ... được định nghĩa như sau*

$$a_0 = 2, \qquad a_{k+1} = 2a_k^2 - 1 \quad \text{với mọi } k \geqslant 0.$$

Chứng minh rằng nếu p là ước nguyên tố lẻ của a_n thì 2^{n+3} là ước của $p^2 - 1$.

Lời giải. Xét phương trình $a + \dfrac{1}{a} = 4$, khi đó ta chọn $a = 2 + \sqrt{3}$ kéo theo $\frac{1}{a} = 2 - \sqrt{3}$. Chú ý rằng

$$a_0 = \frac{a + \frac{1}{a}}{2}$$

suy ra

$$a_1 = 2a_0^2 - 1 = \frac{a^2 + \frac{1}{a^2}}{2}.$$

Tiếp tục ta thu được

$$a_n = \frac{a^{2^n} + \frac{1}{a^{2^n}}}{2} = \frac{(2+\sqrt{3})^{2^n} + (2-\sqrt{3})^{2^n}}{2}, \quad \forall n \geqslant 0.$$

Bây giờ xét ước nguyên tố lẻ p của x_n. Vì $p \mid a_p = 2a_{p-1}^2 - 1$ nên

$$2a_{p-1}^2 \equiv 1 \pmod{p}$$

kéo theo 2 là thặng dư chính phương modulo p. Thế nên $p \equiv \pm 1 \pmod{8}$ hay $8 \mid p^2 - 1$.

Nếu 3 là thặng dư chính phương modulo p thì ta sẽ xét dãy $\{a_n\}$ trên trường $\mathbb{Z}_p$. Mặt khác tồn tại $x \in \mathbb{Z}_p$ sao cho $x^2 = 3$. Khi đó

$$a_n = \frac{(2+x)^{2^n} + (2-x)^{2^n}}{2} = 0$$

vì $2 - x = \frac{1}{2-x}$ nên suy ra

$$(2+x)^{2^{n+1}} = -1$$

mà 2 là thặng dư chính phương nên tồn tại $y \in \mathbb{Z}_p$ sao cho $y^2 = 2$, suy ra

$$2 + x = \frac{4+2x}{2} = \frac{(x+1)^2}{2} = \left(\frac{1+x}{y}\right)^2.$$

Đặt $z = \dfrac{1+x}{y}$, ta có

$$z^{2^{n+2}} = -1 \quad \text{và} \quad z^{2^{n+3}} = 1.$$

Lúc này $\operatorname{ord}(z) = 2^i$ với $i \leqslant n+3$. Nếu $i \leqslant n+2$ thì ta bình phương hai vế $z^i = 1$ cho đến khi nào bằng với $n+2$ ta sẽ gặp ngay mâu thuẫn. Vì thế $\operatorname{ord}(z) = 2^{n+3}$. Vậy $2^{n+3} \mid p-1$, suy ra điều phải chứng minh.

Nếu 3 không là thặng dư chính phương thì ta sẽ xét dãy $\{a_n\}$ trên trường

$$\mathbb{F}_{p^2} = \{u + v\sqrt{3} | u, v \in \mathbb{Z}_p\}$$

Vì $a_n = 0$ nên

$$(2+\sqrt{3})^{2^n} + (2-\sqrt{3})^{2^n} = 0$$

mà $2 - \sqrt{3} \neq 0$ trên $\mathbb{F}_{p^2}$ nên

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^{2^{n+1}} = -1.$$

Mặt khác, $2 = y^2 = (y + 0\sqrt{3})^2$ nên 2 cũng là số chính phương trong $\mathbb{F}_{p^2}$. Đặt $z = \frac{1+\sqrt{3}}{y}$, khi đó $z^{2^{n+2}} = -1$. Lập luận tương tự như trên ta cũng có $\operatorname{ord}(z) = 2^{n+3}$. Vì thế $2^{n+3} \mid p^2 - 1$.

Vậy cả hai trường hợp ta đều có điều phải chứng minh. □

Ví dụ 5 (China TST 2008). *Dãy số $\{x_n\}$ được định nghĩa $x_1 = 2, x_2 = 12$ và $x_{n+2} = 6x_{n+1} - x_n$, với mọi $n \geqslant 1$. Gọi p là số nguyên tố lẻ, q là ước nguyên tố của x_p. Chứng minh rằng nếu $q \neq 2, 3$ thì $q \geqslant 2p - 1$.*

Lời giải. Ta có công thức tổng quát cho dãy số

$$x_n = \frac{(\sqrt{2}+1)^{2n} - (\sqrt{2}-1)^{2n}}{2\sqrt{2}}, \quad \forall n \geqslant 1.$$

Gọi p là số nguyên tố lẻ và q là ước nguyên tố của x_p. Tiếp theo chúng ta có thể thực hiện giống như trong ví dụ 4 là xét trên $\mathbb{Z}_q$ và $\mathbb{F}_{q^2}$ để chứng minh $p \mid q^2 - 1$. Khi đó $p \mid q - 1$ hoặc $p \mid q + 1$, mà p là số nguyên tố lẻ nên

$$p \mid \frac{q-1}{2} \quad \text{hoặc} \quad p \mid \frac{q+1}{2} \tag{*}$$

suy ra

$$p \leqslant \frac{q-1}{2} \quad \text{hoặc} \quad p \leqslant \frac{q+1}{2}$$

Vậy từ cả hai ta có $q \geqslant 2p - 1$.

Ngoài ra chúng ta có thể tiếp cận bài toán theo hướng sau: vì $x_p = 0$ (trong cả $\mathbb{Z}_q$ hay $\mathbb{F}_{q^2}$) nên

$$\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}\right)^{2p} = 1$$

mà p là số nguyên dương bé nhất thỏa điều trên nên p là cấp của $\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}\right)^{2}$. Giả sử $x_n = 0$, khi đó

$$\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}\right)^{2n} = 1$$

suy ra n phải chia hết cho cấp của $\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}\right)^{2}$ hay $p \mid n$. Thế nên ta chỉ cần chứng minh $x_{\frac{q-1}{2}}$ hoặc $x_{\frac{q+1}{2}}$ chia hết cho p là có thể dẫn đến (*). Để làm được điều này chúng ta cũng chứng minh $x_{\frac{q-1}{2}} = 0$ trên $\mathbb{Z}_p$ hoặc $x_{\frac{q+1}{2}} = 0$ trên $\mathbb{F}_{p^2}$. □

Từ lý thuyết và các ví dụ bên trên ta có thể chuyển định lí về dãy số nguyên: cho dãy số nguyên $\{x_n\}$ thỏa $\boldsymbol{x_{n+2} = a x_{n+1} - x_n}$ với mọi $n \geqslant 1$. Khi đó nó có công thức tổng quát

$$\boldsymbol{x_n = c \cdot \left(\lambda^n - \frac{1}{\lambda^n}\right), \quad \forall n \geqslant 1}$$

trong đó $c, \lambda \in \mathbb{Q}[\sqrt{\Delta}]$, $\Delta = a^2 - 4$. Với p là số nguyên tố lẻ, nếu Δ là thặng dư chính phương modulo p thì xét $\mathbb{Z}_p$ và ngược lại xét $\mathbb{F}_{p^2}$. Lúc này định lí trên được phát biểu lại thành: **nếu k là chỉ số bé nhất để $p \mid x_k$ thì với mọi n mà $p \mid x_n$ ta có $k \mid n$.**

Nhận xét 2. Cho p là số nguyên tố lẻ và Δ là số nguyên bất kì. Xét $\mathbb{Z}_p$ và

$$\mathbb{F}_{p^2} = \left\{a + b\sqrt{\Delta} | a, b \in \mathbb{Z}_p\right\}$$

Ở các vấn đề trên chúng ta thường phân chia ra hai trường hợp là Δ là thặng dư chính phương và ngược lại. Khi Δ không là thặng dư chính phương thì $\mathbb{F}_{p^2}$ mới trở thành trường. Tuy nhiên khi Δ là thặng dư chính phương thì $\sqrt{\Delta}$ thuộc $\mathbb{Z}_p$, lúc này ta có thể xem

$$\mathbb{F}_{p^2} = \mathbb{Z}_p$$

mà không gây ra hiểu lầm.

3. Bài tập đề nghị

Bài tập 1. Cho dãy số (a_n) thỏa mãn

$$\begin{cases} a_0 = 1, a_1 = 4 \\ a_{n+1} = 2a_n + 3a_{n-1}, \quad \forall n \geqslant 1 \end{cases}.$$

Chứng minh rằng trong dãy số trên không có số nào là bội của 2017.

Bài tập 2. Cho $p \equiv \pm 3 \pmod 8$ là số nguyên tố. Gọi tập $\{x_1, \ldots, x_{p^2-1}\}$ là tập tất cả các số có dạng $a + b\sqrt{2}$ với a, b là các số không âm không vượt quá $p - 1$ và không đồng thời bằng 0.

a) Chứng minh rằng tồn tại các số nguyên u, v sao cho

$$\prod_{i=1}^{p^2-1} x_i = u + v\sqrt{2}.$$

b) Tìm số dư của u, v khi chia cho p.

Bài tập 3 (Iran MO round 3 2005). Cho k là một số nguyên và $p \equiv 3 \pmod 4$ là một số nguyên tố, chúng ta định nghĩa dãy $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ như sau

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_n = 2ka_{n-1} - (k^2 + 1)a_{n-2} \quad (n \geqslant 2).$$

Chứng minh rằng $a_{n+p^2-1} \equiv a_n \pmod p$ với mọi $n \geqslant 0$.

Bài tập 4 (Poland 2005, IMO Shortlist 2004). Cho k là số nguyên lớn hơn 1 và $m = 4k^2 - 5$. Chứng minh rằng tồn tại các số nguyên dương a và b sao cho dãy (x_n) được định nghĩa bởi

$$x_0 = a, \quad x_1 = b, \quad x_{n+2} = x_{n+1} + x_n \quad \text{với} \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

có tất cả các số hạng đều nguyên tố với m.

Tài liệu tham khảo

[1] Z. X. Wan, *Lectures on Finite Fields and Galois Rings*, 2003.

[2] https://artofproblemsolving.com/community

HAI DÃY SỐ SINH BỞI CÁC ĐẠI LƯỢNG TRUNG BÌNH

Trương Ngọc Đắc
Trường THPT chuyên Lê Quý Đôn, Bình Định

Các dãy số thông thường có dạng $x_n = f(n)$, trong đó $f(x)$ là một hàm số, hoặc cho bởi một công thức truy hồi $x_{n+1} = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ và việc xác định công thức tổng quát của dãy số đã cho phải sử dụng đến phương trình sai phân (chương trình toán cao cấp). Trong phần này, chúng ta xét hai dãy số mà các số hạng của chúng có quan hệ đan xen nhau bởi các đại lượng trung bình và làm thế nào xác định được công thức tổng quát của dãy.

1. Hai dãy số xác định bởi trung bình cộng và trung bình nhân

Ta xét hai dãy số xác định bởi công thức truy hồi dạng trung bình cộng và trung bình nhân.

Bài toán 1. *Cho dãy số (u_n) và (v_n) xác định bởi*

$$\begin{cases} u_0 = a, v_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \\ v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1}.v_n} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Xác định công thức của hai dãy số (u_n) và (v_n) tùy theo tham số thực $a \in [-1, +\infty)$.

Ta thấy

- Nếu $a = 1 \Rightarrow u_n = v_n = 1, \forall n \in \mathbb{N}$.
- Nếu $a = -1 \Rightarrow u_n = v_n = 0, \forall n \geqslant 2$.

- Nếu $a \in (-1, 1)$ thì việc xác định các phần tử ban đầu của dãy số như: $u_2, v_2, u_3, v_3, ...$ không giúp ta xác định được quy luật để xác định được công thức của dãy số.

  Nhận thấy
  $$u_1 = \frac{u_0 + v_0}{2} = \frac{a+1}{2} = A^2,\ v_1 = \sqrt{u_1.v_0} = \sqrt{A^2.1} = A, \quad A > 0.$$
  Khi đó $a = 2A^2 - 1$ có dạng một công thức lượng giác, ta đặt
  $$a = \cos\varphi = 2\cos^2\frac{\varphi}{2} - 1, \quad \varphi \in (0, \pi).$$

- Số thực $a > 1$ đều tồn tại số thực $m = a + \sqrt{a^2 - 1} > 1$, $\frac{1}{2}\left(m + \frac{1}{m}\right) = a$.

Lời giải. Ta xét các trường hợp sau:

- Nếu $a = 1 \Rightarrow u_n = v_n = 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

- Nếu $a = -1 \Rightarrow u_n = v_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

- Nếu $a \in (-1, 1)$, đặt a $= \cos\varphi$, với $\varphi \in (0, \pi)$. Khi đó
  $$u_1 = \frac{\cos\varphi + 1}{2} = \cos^2\frac{\varphi}{2}, \quad v_1 = \sqrt{\cos^2\frac{\varphi}{2}\cdot 1} = \cos\frac{\varphi}{2},$$
  $$u_2 = \frac{u_1 + v_1}{2} = \frac{\cos^2\frac{\varphi}{2} + \cos\frac{\varphi}{2}}{2} = \cos\frac{\varphi}{2}\cdot\cos^2\frac{\varphi}{2^2},$$
  $$v_2 = \sqrt{u_2 v_1} = \sqrt{\cos\frac{\varphi}{2}\cdot\cos^2\frac{\varphi}{2^2}\cdot\cos\frac{\varphi}{2}} = \cos\frac{\varphi}{2}\cdot\cos\frac{\varphi}{2^2}.$$
  Từ đó ta dự đoán và chứng minh bằng phương pháp quy nạp
  $$\begin{cases} u_n = \cos\frac{\varphi}{2}\cdot\cos\frac{\varphi}{2^2}\cdot\cos\frac{\varphi}{2^3}\cdots\cos^2\frac{\varphi}{2^n} \\ v_n = \cos\frac{\varphi}{2}\cdot\cos\frac{\varphi}{2^2}\cdot\cos\frac{\varphi}{2^3}\cdots\cos\frac{\varphi}{2^n} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$
  $$\Leftrightarrow \begin{cases} u_n = \dfrac{1}{2^n}\sin\varphi\cot\dfrac{\varphi}{2^n} \\ v_n = \dfrac{1}{2^n}\sin\varphi\dfrac{1}{\sin\frac{\varphi}{2^n}} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \tag{1}$$
  Thậy vậy, với $n = 1, n = 2$ thì (1) đúng. Giả sử công thức (1) đúng đến $n \geqslant 2$.

  Từ công thức truy hồi của hai dãy số và áp dụng giả thiết quy nạp, ta có:
  $$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^n}\sin\varphi\cot\frac{\varphi}{2^n} + \frac{1}{2^n}\sin\varphi\frac{1}{\sin\frac{\varphi}{2^n}}\right) = \frac{1}{2^{n+1}}\sin\varphi\left(\frac{\cos\frac{\varphi}{2^n} + 1}{\sin\frac{\varphi}{2^n}}\right)$$
  $$= \frac{1}{2^{n+1}}\sin\varphi\frac{2\cos^2\frac{\varphi}{2^{n+1}}}{2\sin\frac{\varphi}{2^{n+1}}\cos\frac{\varphi}{2^{n+1}}} = \frac{1}{2^{n+1}}\sin\varphi\cot\frac{\varphi}{2^{n+1}}.$$

Tương tự, ta cũng có:

$$v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1}v_n} = \sqrt{\frac{1}{2^{n+1}}\sin\varphi\cot\frac{\varphi}{2^{n+1}}\cdot\frac{1}{2^n}\sin\varphi\frac{1}{\sin\frac{\varphi}{2^n}}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2^{n+1}}\sin\varphi\frac{\cos\frac{\varphi}{2^{n+1}}}{\sin\frac{\varphi}{2^{n+1}}}\cdot\frac{1}{2^n}\sin\varphi\frac{1}{2\sin\frac{\varphi}{2^{n+1}}\cos\frac{\varphi}{2^{n+1}}}} = \frac{1}{2^{n+1}}\sin\varphi\frac{1}{\sin\frac{\varphi}{2^{n+1}}}.$$

Vậy theo nguyên lý quy nạp, công thức (1) đúng với mọi n nguyên dương.

Chú ý công thức (1) cũng đúng khi $n = 0$.

- Nếu $a \in (1, +\infty)$. Khi đó tồn tại số thực

$$m = a+\sqrt{a^2-1} > 1, \quad \frac{1}{2}\left(m+\frac{1}{m}\right) = a \Rightarrow u_1 = \frac{1+\frac{1}{2}\left(m+\frac{1}{m}\right)}{2} = \left(\frac{m^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{m^{\frac{1}{2}}}}{2}\right)^2.$$

$$v_1 = \frac{m^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{m^{\frac{1}{2}}}}{2}.$$

$$u_2 = \frac{u_1+v_1}{2} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{m^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{m^{\frac{1}{2}}}}{2}\right)^2 + \left(\frac{m^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{m^{\frac{1}{2}}}}{2}\right)\right] = \left(\frac{m^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{m^{\frac{1}{2}}}}{2}\right)\cdot\left(\frac{m^{\frac{1}{2^2}}+\frac{1}{m^{\frac{1}{2^2}}}}{2}\right)^2.$$

$$v_2 = \sqrt{u_2v_1} = \left(\frac{m^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{m^{\frac{1}{2}}}}{2}\right)\cdot\left(\frac{m^{\frac{1}{2^2}}+\frac{1}{m^{\frac{1}{2^2}}}}{2}\right).$$

Khi đó, ta dự đoán và chứng minh bằng phương pháp quy nạp:

$$\begin{cases} u_n = \left(\frac{m^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{m^{\frac{1}{2}}}}{2}\right)\cdot\left(\frac{m^{\frac{1}{2^2}}+\frac{1}{m^{\frac{1}{2^2}}}}{2}\right)\cdots\left(\frac{m^{\frac{1}{2^n}}+\frac{1}{m^{\frac{1}{2^n}}}}{2}\right)^2 \\ v_n = \left(\frac{m^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{m^{\frac{1}{2}}}}{2}\right)\cdot\left(\frac{m^{\frac{1}{2^2}}+\frac{1}{m^{\frac{1}{2^2}}}}{2}\right)\cdots\left(\frac{m^{\frac{1}{2^n}}+\frac{1}{m^{\frac{1}{2^n}}}}{2}\right) \end{cases} \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_n = \frac{1}{2^n}\left(\frac{m-\frac{1}{m}}{2}\right)\left(\frac{m^{\frac{1}{2^n}}+\frac{1}{m^{\frac{1}{2^n}}}}{m^{\frac{1}{2^n}}-\frac{1}{m^{\frac{1}{2^n}}}}\right) \\ v_n = \frac{1}{2^n}\left(\frac{m-\frac{1}{m}}{2}\right)\left(\frac{2}{m^{\frac{1}{2^n}}-\frac{1}{m^{\frac{1}{2^n}}}}\right) \end{cases} \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad (2)$$

Thậy vậy, với $n = 1, n = 2$ thì (2) đúng. Giả sử công thức (2) đúng đến $n \geqslant 2$. Từ công thức truy hồi của hai dãy số và áp dụng giả thiết quy nạp, ta có:

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} = \frac{1}{2^{n+1}}\left(\frac{m - \frac{1}{m}}{2}\right)\left(\frac{m^{\frac{1}{2^n}} + \frac{1}{m^{\frac{1}{2^n}}} + 2}{m^{\frac{1}{2^n}} - \frac{1}{m^{\frac{1}{2^n}}}}\right)$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}}\left(\frac{m - \frac{1}{m}}{2}\right)\frac{\left(m^{\frac{1}{2^{n+1}}} + \frac{1}{m^{\frac{1}{2^{n+1}}}}\right)^2}{\left(m^{\frac{1}{2^{n+1}}} + \frac{1}{m^{\frac{1}{2^{n+1}}}}\right)\left(m^{\frac{1}{2^{n+1}}} - \frac{1}{m^{\frac{1}{2^{n+1}}}}\right)}$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}}\left(\frac{m - \frac{1}{m}}{2}\right)\left(\frac{m^{\frac{1}{2^{n+1}}} + \frac{1}{m^{\frac{1}{2^{n+1}}}}}{m^{\frac{1}{2^{n+1}}} - \frac{1}{m^{\frac{1}{2^{n+1}}}}}\right).$$

$$v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1}v_n} = \sqrt{\frac{1}{2^{n+1}}\left(\frac{m - \frac{1}{m}}{2}\right)\left(\frac{m^{\frac{1}{2^{n+1}}} + \frac{1}{m^{\frac{1}{2^{n+1}}}}}{m^{\frac{1}{2^{n+1}}} - \frac{1}{m^{\frac{1}{2^{n+1}}}}}\right) \cdot \frac{1}{2^n}\left(\frac{m - \frac{1}{m}}{2}\right)\left(\frac{2}{m^{\frac{1}{2^n}} - \frac{1}{m^{\frac{1}{2^n}}}}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2^{n+1}}\left(\frac{m - \frac{1}{m}}{2}\right)^2\left(\frac{m^{\frac{1}{2^{n+1}}} + \frac{1}{m^{\frac{1}{2^{n+1}}}}}{m^{\frac{1}{2^{n+1}}} - \frac{1}{m^{\frac{1}{2^{n+1}}}}}\right) \cdot \frac{1}{2^{n+1}}\left(\frac{4}{\left(m^{\frac{1}{2^{n+1}}} + \frac{1}{m^{\frac{1}{2^{n+1}}}}\right)\left(m^{\frac{1}{2^{n+1}}} - \frac{1}{m^{\frac{1}{2^{n+1}}}}\right)}\right)}$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}}\left(\frac{m - \frac{1}{m}}{2}\right)\left(\frac{2}{m^{\frac{1}{2^{n+1}}} - \frac{1}{m^{\frac{1}{2^{n+1}}}}}\right).$$

Vậy theo nguyên lý quy nạp, công thức (2) đúng với mọi n nguyên dương.

Lưu ý công thức (2) cũng đúng khi $n = 0$.

$\square$

2. Hai dãy số xác định bởi trung bình điều hòa và trung bình nhân

Xét hai dãy số xác định bởi hệ công thức truy hồi dạng trung bình điều hòa và trung bình nhân

Bài toán 2. *Cho dãy số* (u_n) *và* (v_n) *xác định bởi*

$$\begin{cases} u_0 = a, v_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n v_n}{u_n + v_n} \\ v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1} \cdot v_n} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Xác định công thức của hai dãy số (u_n) *và* (v_n) *tùy theo tham số thực dương* a.

Phân tích

- Hai dãy số này được xác định bởi hệ công thức truy hồi dạng trung bình điều hòa và trung bình nhân là một dạng mới, để xác định được công thức của hai dãy đòi hỏi học sinh phải có kỹ năng thực hiện thành thạo các phép biến đổi.
- Nhưng với cách nhìn của *bài toán 1*, ta thực hiện phép biến đổi:

$$u_{n+1} = \frac{2}{\frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n}}, \quad \frac{1}{v_n} = \sqrt{\frac{1}{u_{n+1}} \cdot \frac{1}{v_n}}.$$

- Ta đặt $\frac{1}{u_n} = x_n$, $\frac{1}{v_n} = y_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Khi đó, ta có

$$\begin{cases} x_0 = \dfrac{1}{a}, y_0 = 1 \\ x_{n+1} = \dfrac{x_n + y_n}{2} \\ y_{n+1} = \sqrt{x_{n+1} \cdot y_n} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

- Hoàn toàn tương tự cách giải bài toán1, ta thực hiện lời giải *bài toán 2*.

Lời giải. Ta đặt $\frac{1}{u_n} = x_n$, $\frac{1}{v_n} = y_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ hai dãy đã cho trở thành

$$\begin{cases} x_0 = \dfrac{1}{a}, y_0 = 1 \\ x_{n+1} = \dfrac{x_n + y_n}{2} \\ y_{n+1} = \sqrt{x_{n+1} \cdot y_n} \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Theo *bài toán 1*, ta xét các trường hợp sau:

- Nếu $a = 1 \Rightarrow x_n = y_n = 1, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow u_n = v_n = 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

- Nếu $a \in (1, +\infty) : a = \frac{1}{cos\varphi}, \varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, thì

$$\begin{cases} x_n = \dfrac{1}{2^n} \sin\varphi \cot \dfrac{\varphi}{2^n} \\ y_n = \dfrac{1}{2^n} \sin\varphi \dfrac{1}{\sin \frac{\varphi}{2^n}} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Vậy công thức xác định hai dãy số

$$\begin{cases} u_n = 2^n \cdot \tan \dfrac{\varphi}{2^n} \cdot \dfrac{1}{\sin\varphi} \\ v_n = 2^n \cdot \sin \dfrac{\varphi}{2^n} \cdot \dfrac{1}{\sin\varphi} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \tag{3}$$

Chú ý công thức (3) cũng đúng khi $n = 0$.

- Nếu $a \in (0, 1) \Rightarrow \frac{1}{a} = b \in (1, +\infty)$. Theo *bài toán 1*, tồn tại số thực $m = b + \sqrt{b^2 - 1} > 1$ và

$$\begin{cases} x_n = \dfrac{1}{2^n} \left(\dfrac{m - \frac{1}{m}}{2} \right) \left(\dfrac{m^{\frac{1}{2^n}} + \frac{1}{m^{\frac{1}{2^n}}}}{m^{\frac{1}{2^n}} - \frac{1}{m^{\frac{1}{2^n}}}} \right) \\ y_n = \dfrac{1}{2^n} \left(\dfrac{m - \frac{1}{m}}{2} \right) \left(\dfrac{2}{m^{\frac{1}{2^n}} - \frac{1}{m^{\frac{1}{2^n}}}} \right) \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Vậy công thức xác định hai dãy số (u_n) và (v_n)

$$\begin{cases} u_n = 2^n \left(\dfrac{2}{m - \frac{1}{m}} \right) \left(\dfrac{m^{\frac{1}{2^n}} - \frac{1}{m^{\frac{1}{2^n}}}}{m^{\frac{1}{2^n}} + \frac{1}{m^{\frac{1}{2^n}}}} \right) \\ v_n = 2^n \left(\dfrac{2}{m - \frac{1}{m}} \right) \left(\dfrac{m^{\frac{1}{2^n}} - \frac{1}{m^{\frac{1}{2^n}}}}{2} \right) \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Chú ý công thức trên cũng đúng khi $n = 0$.

□

3. Hai dãy số xác định bởi trung bình bình phương và trung bình nhân

Xét hai dãy số xác định bởi công thức truy hồi dạng trung bình bình phương và trung bình nhân

Bài toán 3. *Cho dãy số* (u_n) *và* (v_n) *xác định bởi*

$$u_0 = a,\ v_0 = 1,\ u_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n^2 + v_n^2}{2}},\ v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1} \cdot v_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Xác định công thức của hai dãy số (u_n) *và* (v_n) *tùy theo tham số thực dương* a.

Phân tích

- Nếu biến đổi thông thường để tìm ra quy luật xác định công thức hai dãy số là việc làm rất phức tạp và khó thực hiện được.
- Nhưng với giả thiết đã cho, ta nhận thấy các số hạng của hai dãy số đều dương và thực hiện phép biến đổi:

$$u_{n+1}^2 = \frac{u_n^2 + v_n^2}{2},\ v_{n+1}^2 = \sqrt{u_{n+1}^2 . v_n^2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Và đặt $u_n^2 = x_n,\ v_n^2 = y_n, \forall n \in \mathbb{N}$, theo bài toán 1, ta có lời giải sau.

Lời giải. Ta xét các trường hợp sau:

- Nếu $a = 1 \Rightarrow u_n = v_n = 1, \forall n \in \mathbb{N}$.
- Nếu $a \in (0, 1)$. Từ công thức truy hồi truy hồi của hai dãy số, ta nhận thấy $u_n > 0$, $v_n > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$ và

$$u_{n+1}^2 = \frac{u_n^2 + v_n^2}{2}, \quad v_{n+1}^2 = \sqrt{u_{n+1}^2 \cdot v_n^2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Đặt $u_n^2 = x_n,\ v_n^2 = y_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow x_0 = a^2, y_0 = 1,\ x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2},\ y_{n+1} = \sqrt{x_{n+1} . y_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{4}$$

Theo *bài toán 1*, ta có

$$x_0 = a^2 = \cos\varphi, \quad \varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

và công thức xác định hai dãy số

$$\begin{cases} x_n = \dfrac{1}{2^n} \sin\varphi \cot\dfrac{\varphi}{2^n} \\ y_n = \dfrac{1}{2^n} \sin\varphi \dfrac{1}{\sin\frac{\varphi}{2^n}} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Từ đó, suy ra công thức xác định dãy số (u_n) và (v_n)

$$\begin{cases} u_n = \sqrt{\dfrac{1}{2^n}\sin\varphi\cot\dfrac{\varphi}{2^n}} \\ v_n = \sqrt{\dfrac{1}{2^n}\sin\varphi\dfrac{1}{\sin\frac{\varphi}{2^n}}} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \tag{5}$$

Chú ý công thức (5) cũng đúng khi $n = 0$ khi $a \in (0, 1)$.

- Nếu $a > 1 \to a^2 \in (1, +\infty) \Rightarrow \exists m \in \mathbb{R} : m = a^2 + \sqrt{a^4 - 1} > 1,\ \frac{1}{2}\left(m + \frac{1}{m}\right) = a^2$.

  Theo *bài toán 1*, ta có công thức (4) xác định hai dãy số $(x_n), (y_n)$

$$\begin{cases} x_n = \dfrac{1}{2^n}\left(\dfrac{m-\frac{1}{m}}{2}\right)\left(\dfrac{m^{\frac{1}{2^n}} + \frac{1}{m^{\frac{1}{2^n}}}}{m^{\frac{1}{2^n}} - \frac{1}{m^{\frac{1}{2^n}}}}\right) \\ y_n = \dfrac{1}{2^n}\left(\dfrac{m-\frac{1}{m}}{2}\right)\left(\dfrac{2}{m^{\frac{1}{2^n}} - \frac{1}{m^{\frac{1}{2^n}}}}\right) \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

  Suy ra công thức xác định dãy số (u_n) và (v_n)

$$\begin{cases} u_n = \sqrt{\dfrac{1}{2^n}\left(\dfrac{m-\frac{1}{m}}{2}\right)\left(\dfrac{m^{\frac{1}{2^n}} + \frac{1}{m^{\frac{1}{2^n}}}}{m^{\frac{1}{2^n}} - \frac{1}{m^{\frac{1}{2^n}}}}\right)} \\ v_n = \sqrt{\dfrac{1}{2^n}\left(\dfrac{m-\frac{1}{m}}{2}\right)\left(\dfrac{2}{m^{\frac{1}{2^n}} - \frac{1}{m^{\frac{1}{2^n}}}}\right)} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \tag{6}$$

  Chú ý công thức (6) cũng đúng khi $n = 0$ khi $a > 1$.

□

4. Hai dãy số xác định bởi tựa trung bình bình phương và trung bình nhân

Ta xét hai dãy số xác định bởi hệ công thức truy hồi dạng tựa trung bình bình phương và trung bình nhân

Bài toán 4. *Cho dãy số (u_n) và (v_n) xác định bởi*

$$u_0 = a,\ v_0 = 1,\ u_{n+1} = \frac{u_n v_n}{\sqrt{\frac{u_n^2 + v_n^2}{2}}},\ v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1} \cdot v_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Xác định công thức của hai dãy số (u_n) và (v_n) tùy theo tham số thực dương a.

Phân tích

- Hai dãy số có các số hạng quan hệ đan xen giữa trung bình tựa trung bình bình phương và trung trung bình nhân, để xác định được công thức của hai dãy số là một việc làm rất khó.
- Nhưng nếu biến đổi hai công thức truy hồi của dãy về dạng

$$\frac{1}{u_{n+1}^2} = \frac{\frac{1}{u_n^2} + \frac{1}{v_n^2}}{2}, \frac{1}{v_{n+1}^2} = \sqrt{\frac{1}{u_{n+1}^2 \cdot v_n^2}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

và sử dụng phép đặt đưa về *bài toán 1*.

Lời giải. Ta xét các trường hợp sau:

- Nếu $a = 1 \Rightarrow u_n = v_n = 1, \forall n \in \mathbb{N}$.
- Nếu $a \in (1, +\infty) : a^2 = \frac{1}{\cos\varphi}, \varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Từ công thức truy hồi truy hồi của hai dãy số, ta nhận thấy $u_n > 0$, $v_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ và

$$\frac{1}{u_{n+1}^2} = \frac{\frac{1}{u_n^2} + \frac{1}{v_n^2}}{2}, \frac{1}{v_{n+1}^2} = \sqrt{\frac{1}{u_{n+1}^2 . v_n^2}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Ta đặt $u_n^2 = \frac{1}{x_n}, v_n^2 = \frac{1}{y_n}, \forall n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow x_0 = \frac{1}{a^2},\ y_0 = 1,\ x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2},\ y_{n+1} = \sqrt{x_{n+1} \cdot y_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{7}$$

Theo *bài toán 1*, từ (7) công thức xác định hai dãy số (x_n), (y_n)

$$\begin{cases} x_n = \dfrac{1}{2^n} \sin\varphi \cot\dfrac{\varphi}{2^n} \\ y_n = \dfrac{1}{2^n} \sin\varphi \dfrac{1}{\sin\frac{\varphi}{2^n}} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Từ đó, suy ra công thức xác định hai dãy số (u_n) và (v_n)

$$\begin{cases} u_n = \sqrt{\dfrac{2^n \cdot \tan\frac{\varphi}{2^n}}{\sin\varphi}} \\ v_n = \sqrt{\dfrac{2^n \cdot \sin\frac{\varphi}{2^n}}{\sin\varphi}} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \tag{8}$$

Chú ý công thức (8) cũng đúng khi $n = 0$ khi $a > 1$.

- Nếu $a \in (0, 1)$, thì $\frac{1}{a^2} \in (1, +\infty)$, tồn tại số thực
$$m = \frac{1 + \sqrt{1 - a^4}}{a^2} > 1 : \frac{m^2 + 1}{2m} = \frac{1}{a^2}.$$
Theo *bài toán 1*, từ (7) ta có công thức xác định hai dãy số (x_n), (y_n)
$$\begin{cases} x_n = \dfrac{1}{2^n}\left(\dfrac{m - \frac{1}{m}}{2}\right)\left(\dfrac{m^{\frac{1}{2^n}} + \frac{1}{m^{\frac{1}{2^n}}}}{m^{\frac{1}{2^n}} - \frac{1}{m^{\frac{1}{2^n}}}}\right) \\ y_n = \dfrac{1}{2^n}\left(\dfrac{m - \frac{1}{m}}{2}\right)\left(\dfrac{2}{m^{\frac{1}{2^n}} - \frac{1}{m^{\frac{1}{2^n}}}}\right) \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$
Từ đó, suy ra công thức xác định dãy số (u_n) và (v_n)
$$\begin{cases} u_n = \sqrt{2^n\left(\dfrac{2}{m - \frac{1}{m}}\right)\left(\dfrac{m^{\frac{1}{2^n}} - \frac{1}{m^{\frac{1}{2^n}}}}{m^{\frac{1}{2^n}} + \frac{1}{m^{\frac{1}{2^n}}}}\right)} \\ v_n = \sqrt{2^n\left(\dfrac{2}{m - \frac{1}{m}}\right)\left(\dfrac{m^{\frac{1}{2^n}} - \frac{1}{m^{\frac{1}{2^n}}}}{2}\right)} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \tag{9}$$
Chú ý công thức (9) cũng đúng khi $n = 0$ khi $a \in (0, 1)$.

□

5. Kết luận

Qua các bài toán trên ta thấy nếu ta chọn các giá trị đặt biệt của tham số a thì việc xác định công thức của hai dãy số hoặc tìm giới hạn của các dạy số ta được những bài toán về dãy số có tính chất "*đẹp*".

Khi biết được công thức xác định dãy số, ta xây dựng các bài toán về tính chất các phần tử của dãy số hoặc xác định giới hạn của các dãy số, tạo lớp bài tập về dãy số thêm phong phú, tạo hứng thú cho các em học sinh có năng khiếu về toán say mê nghiên cứu.

Tài liệu tham khảo

[1] V.Adiyasuren 2010, *A Note on integral inequalities involving several convex function*, web: iom.num.edu.mn/journal/2010/V.Adiyasuren.pdf

[2] Nguyễn Văn Mậu 2002, *Một số bài toán chọn lọc về dãy số*, NXB Giáo Dục.

[3] Nguyễn Văn Mậu 1997, *Phương trình hàm*, NXB Giáo Dục.

BÀI TOÁN PHỦ BẢNG Ô VUÔNG

Nguyễn Tất Thu
Đồng Nai

TÓM TẮT

Các bài toán về phủ bàn cờ thường xuất hiện trong các kì thi học sinh giỏi các cấp và trong các tạp chí về Toán học. Lời giải các bài toán này rất đa dạng và học sinh thường gặp khó khăn khi giải quyết bài toán này. Trong bài viết này, chung tôi giới thiệu một số thuật toán thường hay sử dụng khi giải quyết các bài toán về phủ bàn cờ.

Với bài toán về phủ bàn cờ ta thường gặp các câu hỏi sau:

- Xác định tất cả các giá trị của kích thước (bàn cờ $m \times n$) sao cho có thể phủ được bàn cờ bởi các mino cho trước.
  Để trả lời câu hỏi này ta thường thực hiện theo hai bước.
  Bước 1: Bằng các lập luận ta tìm ra điều kiện cần đối với $m,\ n$.
  Bước 2: Với điều kiện tìm được ở trên, ta chỉ ra cách phủ bảng. Thường để chỉ ra cách phủ bạng ta chia bảng lớn thành các bảng có kích thước nhỏ hơn và chỉ ra cách phủ trên các bảng nhỏ.

- Có thể phủ được bảng cho trước bởi các quân cờ cho trước hay không?
  Với bài toán này, nếu câu trả lời là có thì chúng ta cần chỉ ra một cách phủ và thông thường ta chia bảng đã cho thành các bảng nhỏ hơn và chỉ ra cách phủ các hình nhỏ đó. Vì vậy, ta thường dùng quy nạp để chỉ ra cách phủ.
  Với câu trả lời là không thì ta thường tạo ra các bất biến để dẫn đến điều vô lí. Để tạo bất biết ta thường dùng cách tô màu hoặc điền số.

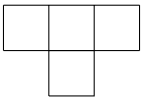
- Nếu không phủ kín được bàn cờ thì hãy xác định tất cả các vị trí của các ô còn trống.

- Cho trước một bàn cờ với kích thước xác định, nếu phủ được bàn cờ thì số nhỏ nhất (hoặc lớn nhất) một loại mino nào đó(trong số các mino đã cho) cần dùng là bao nhiêu?

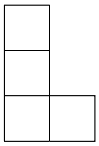
Sau đây, ta xét một số ví dụ.

Bài toán 1. *Tìm tất cả các số nguyên dương n để có thể phủ bảng $n \times n$ bởi các quân cờ mino*

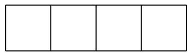
1. *$T-$mino.*
2. *$L-$mino 4 ô vuông.*
3. 1×4.



$T-mino$

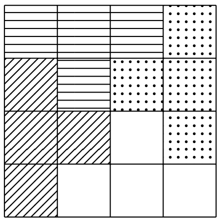


$L-mino$

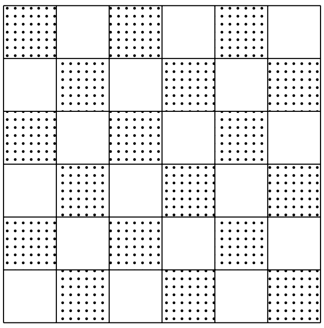


$1 \times 4-mino$

Lời giải. 1. Ta thấy mỗi $T-$mino có 4 ô vuông đơn vị, do đó để phủ được bảng $n \times n$ thì trước hết số ô vuông trên bảng (có n^2 ô vuông) phải là bội của 4, tức là $n^2 \vdots 4$, hay n là số chẵn. Vậy ta đã tìm được điều kiện cần của n, phỉa chăng rằng với n chẵn ta có thể phủ bàn cờ? Bằng cách xét các giá trị cụ thể $n = 2$ ta thấy không phủ được, với $n = 4$ ta có thể phủ được theo hình dưới đây



Từ đây, ta thấy với $n = 4k$ thì ta có thể phủ được bằng cách chia bảng $n \times n$ thành k^2 bảng hình vuông 4×4 và mỗi hình vuông nhỏ ta phủ được theo cách trên. Do đó, ta có dự đoán $n \vdots 4$ mới phủ được. Để làm điều này, ta cần chứng minh với $n \equiv 4 \pmod 4$ thì không thể phủ được, ta xét trường hợp $n = 6$. Để chứng minh không phủ được ta cần tạo ra một điều mâu thuẫn và để làm điều này ta tạo ra một bất biến bằng cách tô màu dạng bàn cơ vua (các ô được tô màu đen trắng xen kẽ nhau). Khi đó, ta thấy có tất cả 18 ô được tô màu đen. Hơn nữa, ta thấy mỗi quân cờ $T-$mino chỉ phủ đúng 1 ô đen hoặc 3 ô đen. Hơn nữa, để phủ bảng 6×6 ta cần dùng 9 quân cờ. Do đó, giả sử nếu phủ được thì số ô đen trên bảng phải là số lẻ. Điều này không thể xảy ra. Với cách làm tương tự ta chứng minh được trong trường hợp tổng quát.



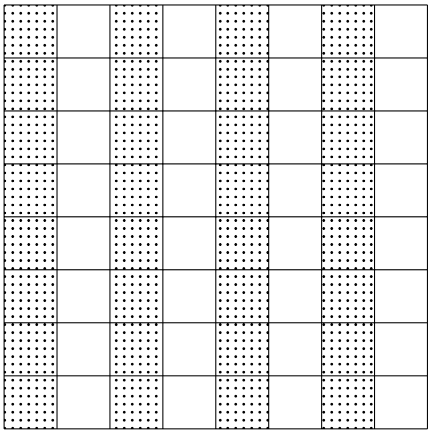
Ở trên, ta đã dùng cách tô màu xen kẽ để tạo ra bất biến số ô đen trên bảng là số lẻ. Dựa vào cách tô màu đó, ta thấy số quân cờ $T-$ mino chỉ có hai loại chứa 1 ôn đen (loại 1) và chứa 3 ô đen (loại 2). Do đó, nếu gọi $x,\ y$ là số quân cờ $T-$mino loại 1 và loại 2, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y = \dfrac{n^2}{4} \\ x + 3y = \dfrac{n^2}{2} \end{cases} \Rightarrow y = \frac{n^2}{8}.$$

Do $y \in \mathbb{N}$, nên ta có $n^2 \vdots 8$, hay $n \vdots 4$.

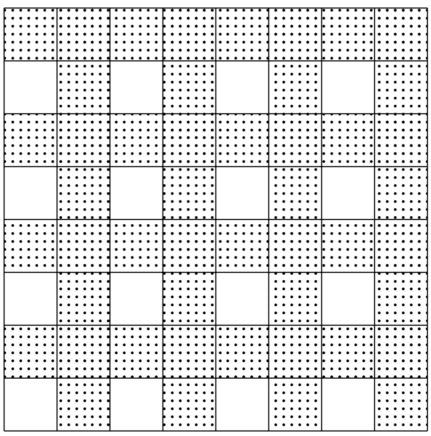
Với $n \vdots 4$ thì ta phủ được theo cách trên.

2. Với trường hợp phủ quân cờ $L-$mino ta cũng thấy được n là số chẵn, hay $n = 2k$ và bằng cách xét các giá trị $n = 2,\ n = 4$ ta cũng thấy chỉ có $n = 4$ là phủ được, do đó với $n = 4k$ ta phủ được. Do đó, ta dự đoán $n = 4k + 2$ không thể phủ được. Với cách tô mau như trên ta thấy có tất cả $2(2k + 1)^2$ ô đen và mỗi quân cờ $L-$mino chứa đúng 2 ô đen, nên ta không dẫn đến mâu thuẫn nào cả! Vì vậy cách tô màu trên không hiệu quả trong bài toán này. Ta tìm cách tô màu khác. Bây giờ ta tô các cột xen kẽ.



Khi đó, mỗi quân cờ $L-$mino chứa 1 ô đen hoặc 3 ô đen. Với các làm tương tự như trên ta cũng dẫn đến $n \vdots 4$.

3. Với quân cờ 1×4 ta cũng thấy n chẵn và với $n = 4$ ta có thể phủ, do đó với $n = 4k$ ta phủ được. Với $n = 2$ ta không thể phủ do đó, ta dự đoán $n = 4k + 2$ không thể phủ. Hai cách tô màu ở trên không dẫn đến mâu thuẫn nào cả, nên ta tìm cách tô màu khác. Ta tô đen các ô nằm hàng chẵn và cột chẵn bởi màu đen, các ô còn lại tô màu trắng.



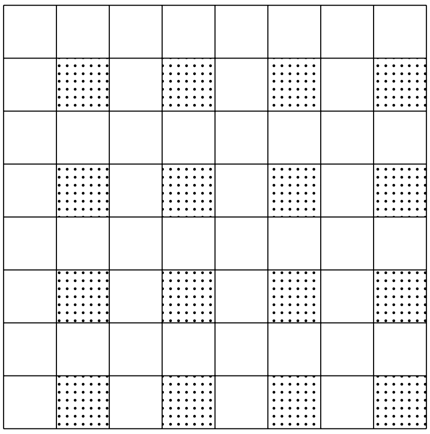
Ta thấy số ô trắng là k^2. Hơn nữa mỗi quân cờ domino 1×4 chứa 0 hoặc 2 ô trắng. Do đó, số ô trắng phải là số chẵn, hay k chẵn. Từ đó, ta có $n = 4m$.
Với $n = 4m$ ta chứng minh có thể lát bảng $n \times n$ bởi các quân cờ domino 1×4. Ta chia

hình vuông $4m \times 4m$ thành m^2 hình vuông 4×4. Rõ ràng mỗi hình vuông 4×4 luôn phủ kín được bởi các quân cờ domino 1×4.

□

Bài toán 2. *Một bảng ô vuông kích thước $n \times m$ có thể phủ kín bởi các quân cờ ô vuông 2×2 và quân cờ chữ nhật 1×4. Hỏi có thể thay một quân cờ mino vuông bởi quân cờ chữ nhật và bằng cách chuyển chỗ các quân cờ còn lại để có thể phủ kín bàn cờ hay không?*

Lời giải. Với bài toán này ta dự đoán là không thể. Vì nếu có thể thì ta cần chỉ ra cách phủ, ở đây ta không biết kích thước của bảng và vị trí các quân cờ mino, nên việc chỉ ra cách phủ rất khó để thực hiện. Để chứng minh không phủ được ta cần tạo ra bất biến và từ bất biến đó ta suy ra được điều mâu thuẫn. Bây giờ ta tô màu các ô $(2k; 2r)$ của bảng bởi màu đen.



Ta thấy mỗi quân cờ mino-vuông chiếm 1 ô đen, còn mỗi quân cờ mino-chữ nhật chiếm 2 ô đen hoặc 0 ô đen. Do đó, khi thay một quân cờ mino-vuông bởi một quân cơ mino-chữ nhật thì số ô đen trong bảng sẽ tăng 1 hoặc giảm 1. Điều này vô lí.

□

Bài toán 3. *Người ta dùng các domino L và hình vuông 2×2 để phủ kín bảng ô chữ nhật 4×2019. Chứng minh rằng số quân cờ domino L dùng để lát là số chẵn.*

Lời giải. Ta điền các số 1 và 5 vào bảng như hình dưới

1	1	1	1	1					1
5	5	5	5	5					5
1	1	1	1	1					1
5	5	5	5	5					5

Khi đó tổng các số ghi trên mỗi quân cờ domino L chia hết cho 8, còn tổng các số ghi trên quân cờ 2×2 chia 8 có số dư là 4. Hơn nữa tổng các số ghi trên bảng là

$$12 \cdot 2019 \equiv 4 \pmod 8$$

và có tất cả 2019 quân cơ. Do đó, nếu số quân cờ 2×2 là số chẵn, thì tổng các số ghi trên các quân cờ 2×2 chia hết cho 8, suy ra vô lí. Do đó, số quân cờ 2×2 dùng phải là số lẻ, điều đó dẫn tới số quân cờ L phải là số chẵn.
Cách 2. Ta tô màu các cột lẻ bởi màu đen. Khi đó, mỗi quân cờ 2×2 chứa 2 ô đen và mỗi quân cờ L chứa 1 hoặc 3 ô đen.
Gọi $x,\ y,\ z$ lần lượt là số quân cờ 2×2 và số quân cờ L chứa 1 ô đen và 3 ôn đen. Ta có

$$2x + y + 3z = 1010 \cdot 4.$$

Suy ra $y + 3z \equiv 0 \pmod 2$, hay $y + z \equiv 0 \pmod 2$.

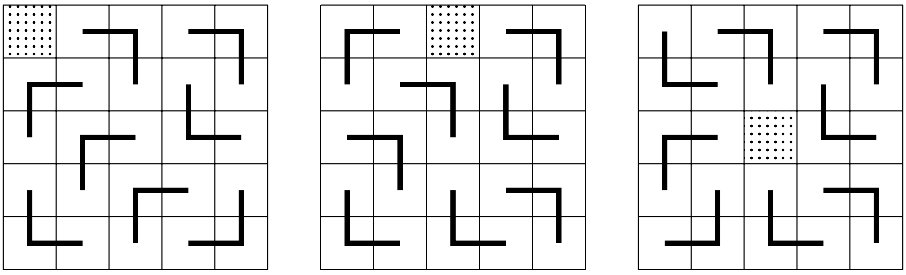
□

Bài toán 4. *Phủ hình vuông 5×5 bằng các quân domino hình chữ L sao cho các ô không chườm lên nhau thì còn thừa 1 ô không được phủ. Hỏi ô đó có thể nằm ở vị trí nào?*

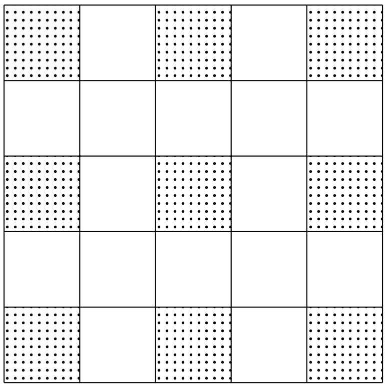
Lời giải. Ta đánh số 25 ô vuông của bảng: các ô vuông ở số hàng lẻ và số cột lẻ là số 7 (có 9 ô); 16 ô vuông còn lại ta đánh số -4 (như hình vẽ bên dưới).

7	-4	7	-4	7
-4	-4	-4	-4	-4
7	-4	7	-4	7
-4	-4	-4	-4	-4
7	-4	7	-4	7

Nhận xét khi ta lát một quân domino L bất kì vào bảng bên thì tổng ba ô số trong quân domino L ấy hiển nhiên là số âm.
Từ nhận xét trên: Nếu ô không được lát là ô số mang số -4 thì tổng các ô còn lại là: $7 \cdot 9 + (-4) \cdot 15 = 3 > 0$. Và do đó phần còn lại không thể lát kín bằng các quân domino L.
Do đó các ô không được lát chỉ có thể nằm trong số các ô mang số 7. Ta sẽ chỉ ra các ô này đều có thể là ô không được lát.
Do tính đối xứng của hình vuông 5×5 ta chỉ cần chỉ ra cách lát trong 3 trường hợp :



Cách 2: Ta tô màu như hình vẽ



Nếu ô có màu trắng không được phủ thì cả 9 ô đen đều được phủ. Mà mỗi triminô chỉ phủ đúng một ô đen. Suy ra có ít nhất 9 triminô được dùng. Khi đó số ô ít nhất được phủ là $9 \times 3 = 27 > 25$. Vô lí.
Vậy không được phủ phải là ô đen.

□

Bài toán 5. *Có thể phủ bảng* 2023×2023 *bởi các quân cờ hình vuông* 3×3 *và* 4×4 *hay không?*

Lời giải. Với những bài toán này thường câu trả lời là không phủ được và chúng ta cần tìm một bất biến để dẫn đến điều mâu thuẫn nếu phủ được. Ta có thể thực hiện theo các cách sau:
Cách 1:(Trương Thụ Nghĩa - PTNK, Phạm Lê Huy Hoàng - Chuyên Lương Thế Vinh)
Ta ghi 1 vào các ô hàng lẻ và số -1 và các ô hàng chẵn.

1	1	1	1	1	1	1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	1	1	1	1	1	1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	1	1	1	1	1	1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	1	1	1	1	1	1

Khi đó, ta thấy tổng các số ghi trên mỗi hình vuông 3×3 bằng 3 hoặc -3 và tổng các số ghi trên mỗi hình vuông 4×4 bằng 0. Do đó, nếu phủ được bảng 2023×2023 bởi các hình vuông 3×3 và 4×4 thì tổng các số ghi trên bảng là một số chia hết cho 3. Tuy nhiên tổng các số ghi trên bảng bằng 2023 không chia hết cho 3. Do đó, câu trả lời là không thể phủ.

Cách 2: (Nguyễn Xuân Phúc - Chuyên Lý Tự Trọng, Cần Thơ)

Trước hết ta ghi vào bảng các số 1 và -1 xen kẽ nhau và 4 ô vuông đơn vị ở 4 góc đều ghi số 1.

1	-1	1	-1	1	-1	1
-1	1	-1	1	-1	1	-1
1	-1	1	-1	1	-1	1
-1	1	-1	1	-1	1	-1
1	-1	1	-1	1	-1	1
-1	1	-1	1	-1	1	-1
1	-1	1	-1	1	-1	1

Khi đó, tổng các số trên bảng 4×4 bằng 0 còn tổng các số trên bảng 3×3 bằng 1 (loại 1) hoặc -1 (loại 2). Do tổng các số trên bảng bằng 1, nên số hình vuông 3×3 loại 1 nhiều hơn số hình vuông 3×3 loại 2 đúng một hình vuông. Bây giờ ta đánh số lại như sau

1	1	1	1	1	1	1
1	-8	1	-8	1	-8	1
1	1	1	1	1	1	1
1	-8	1	-8	1	-8	1
1	1	1	1	1	1	1
1	-8	1	-8	1	-8	1
1	1	1	1	1	1	1

Khi đó, ta thấy tổng các số ghi trên bảng 3×3 loại 1 bằng 0, loại 2 bằng -9 và tổng các số trên hình vuông 4×4 bằng -20. Gọi x là số hình vuông 3×3 loại 1 dùng để phủ. Khi đó, ta có phương trình

$$x \cdot 0 + (x-1) \cdot (-9) + \left(\frac{2023^2 - (2x-1) \cdot 9}{16} \right) \cdot (-20) = 1011^2 \cdot (-8) + 2023^2 - 1011^2.$$

Giải phương trình trên ta được $x \notin \mathbb{Z}$.

Cách 3: Ngoài hai cách ở trên ta có thể điền số theo cách sau:

Đặt $x = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$ và $y = \cos \frac{2\pi}{4} + i \sin \frac{2\pi}{4}$. Tại ô vuông $(i; j)$, ta điền số $x^i \cdot x^j$. Xét bảng ô vuông $m \times m$ và giả sử ở ô góc trái của bảng gi số $x^\alpha y^\beta$. Khi đó, tổng các số được ghi trong các ô của bảng này là

$$\sum_{i=\alpha}^{m+\alpha-1} \sum_{j=\beta}^{m+\beta-1} x^i y^j = x^\alpha y^\beta \cdot \frac{x^m - 1}{x - 1} \cdot \frac{y^m - 1}{y - 1}$$

Ta có

$$x^m - 1 = 0 \Leftrightarrow m \,\vdots\, 3 \text{ và } y^m - 1 = 0 \Leftrightarrow m \,\vdots\, 4.$$

Từ đó, ta suy ra tổng các số được ghi trong các bảng ô vuông 3×3 và 4×4 bằng 0.

Do đó, nếu phủ được thì tổng các số trong bảng bằng 0. Tuy nhiên, tổng các số trong bảng bằng

$$xy \cdot \frac{x^{2023} - 1}{x - 1} \cdot \frac{y^{2023} - 1}{y - 1} \neq 0.$$

□

Bài toán 6. *Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho có thể phủ bàn ô vuông $n \times n$ bởi đồng thời hai loại ô vuông 40×40 và 49×49.*

Lời giải. Đặt $x = \cos \frac{2\pi}{40} + i \cdot \sin \frac{2\pi}{40}$ và $y = \cos \frac{2\pi}{49} + i \cdot \sin \frac{2\pi}{49}$.

Ta điền vào ô (i, j) của bảng số $x^i \cdot y^j$ với $1 \le i, j \le n$.

Xét bảng ô vuông $m \times m$ và giả sử ở ô góc trái của bảng gi số $x^\alpha y^\beta$. Khi đó, tổng các số được ghi trong các ô của bảng này là

$$\sum_{i=\alpha}^{m+\alpha-1} \sum_{j=\beta}^{m+\beta-1} x^i y^j = x^\alpha y^\beta \cdot \frac{x^m - 1}{x-1} \cdot \frac{y^m-1}{y-1}$$

Ta có

$$x^m - 1 = 0 \Leftrightarrow m \,\vdots\, 40 \text{ và } y^m - 1 = 0 \Leftrightarrow m \,\vdots\, 49.$$

Từ đó, ta suy ra tổng các số được ghi trong các bảng ô vuông 40×40 và 49×49 bằng 0.

Do đó, tổng các số ghi trong bảng $n \times n$ bằng 0 hay $n \,\vdots\, 40$ hoặc $n \,\vdots\, 49$.
Gọi a là số bảng 40×40 và b là số bảng 49×49 Khi đó, ta có

$$40^2 a + 49^2 b = n^2.$$

- Nếu $n \,\vdots\, 40$ thì ta có $b \,\vdots\, 40^2 \Rightarrow b \geq 40^2$, suy ra

$$n^2 \geq 40^2 \left(a + 49^2\right) > 40^2 \cdot 49^2 \Rightarrow n \geq 40.50 = 2000.$$

  (Do $n \,\vdots\, 40$).

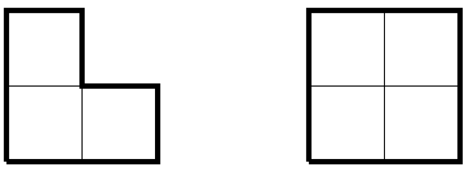
- Nếu $n \,\vdots\, 49$ thì ta có

$$a \,\vdots\, 49^2 \Rightarrow a \geq 49^2 \Rightarrow n > 40 \cdot 49 \Rightarrow n \geq 41 \cdot 49 = 2009.$$

Ta chỉ ra cách ghép bảng 2000×2000 bởi các quân cờ 40×40 và 49×49.
Ghép bảng 1960×1960 bởi 40^2 bảng 49×49 và phần còn lại bởi các bảng 40×40.
Vậy $n_{\min} = 2000$.

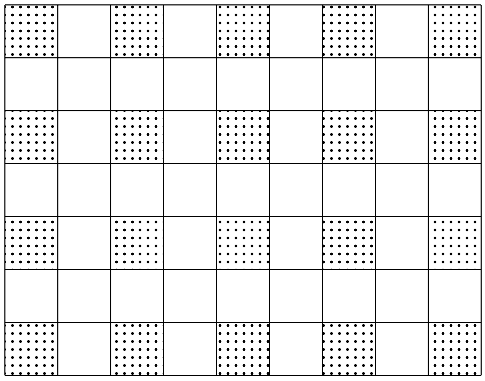
□

Bài toán 7. *Một hình chữ nhật 9×7 được phủ bởi cả hai 2 loại gạch như hình bên dưới: chữ L và hình vuông.*

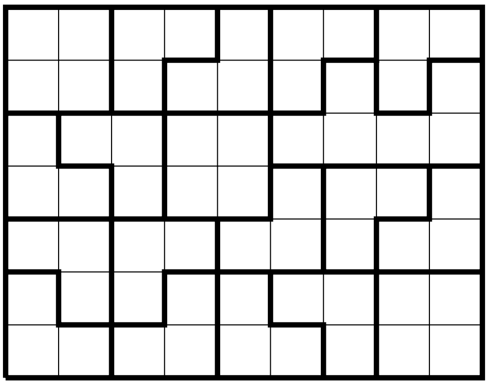


Tìm tất cả các giá trị có thể có của số lượng các viên gạch hình vuông đã được dùng.

Lời giải. Gọi x là số viên gạch chữ L và y là số viên gạch hình vuông 2×2. Ta tô màu đen các ô vuông giao của hàng lẻ và cột lẻ. Ta có 20 ô vuông được tô màu.



Rõ ràng mỗi viên gạch sẽ chứa không quá một ô tô màu đen. Suy ra $x + y \geq 20$.
Ngoài ra ta cũng có: $3x + 4y = 63$.
Từ đó suy ra $y \leq 3$ và y chia hết cho 3, dựa theo điều kiện thứ hai.
Suy ra $y = 3$. Dưới đây là một cách lát thỏa mãn điều kiện đó.



$\square$

Bài toán 8. *Bảng $(2n + 1) \times (2n + 1)$ được lát bởi các hình vuông 2×2 và 1×1. Hỏi số nhỏ nhất các hình vuông 1×1 được dùng để lát là bao nhiêu?*

Lời giải. Gọi $m,\ k$ là số hình vuông 2×2 và 1×1 được dùng để lát. Vì bảng $(2n+1) \times (2n+1)$ có diện tích bằng $(2n + 1)^2$, nên ta có

$$4m + k = (2n + 1)^2.$$

Ta tô màu đỏ các ô $(2i; 2j)$ với $i,\ j = \overline{1, n}$. Khi đó mỗi hình vuông 2×2 chứa đúng một ô tô màu. Do đó $m \leq n^2$. Suy ra

$$k = (2n + 1)^2 - 4m \geq (2n + 1)^2 - 4m^2 = 4n + 1.$$

Giờ ta lát hình vuông $2n \times 2n$ bởi n^2 hình vuông 2×2. Số ô vuông con lại đúng bằng

$$(2n + 1) + 2n = 4n + 1$$

và ta dùng $4n + 1$ hình vuông 1×1 để lát các ô này.

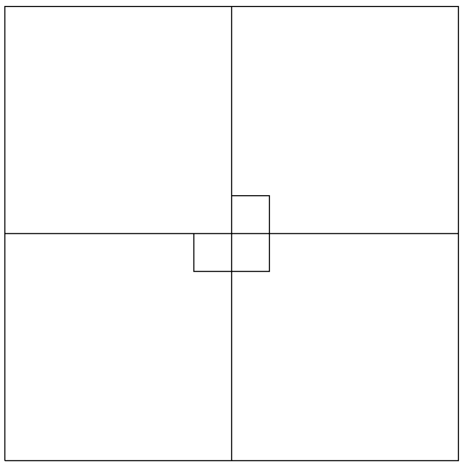
$\square$

Bài toán 9. *Gọi (H) là bảng $2^n \times 2^n$ bỏ đi một ô vuông bất kì. Chứng minh rằng ta có thể phủ (H) bởi*

1. *các $L-$mino 3 ô vuông.*
2. *các mino 1×3 và không quá n quân cờ $L-$mino.*

Lời giải. 1. Ta chứng minh bài toán bằng quy nạp.

- Với $n = 1$ ta thấy bài toán hiển nhiên đúng.
- Giả sử bài toán đúng với bảng $2^k \times 2^k$ với $k = 1, \ldots, n-1$. Xét bảng $2^n \times 2^n$, ta chia bảng này thành 4 bảng ôn vuông $2^{n-1} \times 2^{n-1}$. Khi đó có một trong bốn hình vuông này có một ô vuông đơn vị bị xóa, theo giả thiết quy nạp ta có thể lát hình vuông này bởi các quân Domino L. Ba hình vuông còn lại, ta sẽ lát một quân Domini L ở tâm của hình vuông ban đầu, sao cho mỗi ô vuông đơn vị của quân Đomino L nằm trong một hình vuông $2^{n-1} \times 2^{n-1}$. Theo giả thiết quy nạp ta có thể lát các hình vuông này bằng quân Domino.



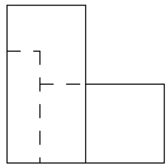
2. Trước hết ta chứng minh các bổ đề sau:

Nhận xét 1. *Mọi hình chữ nhật có kích thước một cạnh chia hết cho 3 thì lát được bởi các viên đá hình đô-mi-nô 1×3.*

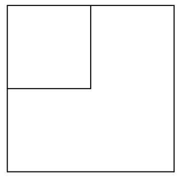
Bổ đề này là hiển nhiên.

Nhận xét 2. *Mọi hình L được tạo bởi ba hình vuông kích thức $2^n \times 2^n$ đều lát được bởi một số viên đá hình đô-mi-nô và 1 quân cờ L.*

Chứng minh:
Kết luận hiển nhiên đúng khi $n = 1$.
Giả sử kết luận đúng cho $n = k-1$ thì ta chia một hình L tạo bởi 3 hình vuông kích thước $2^k \times 2^k$ thành các hình chữ nhật có một cạnh chia hết cho 3 và một hình L tạo bởi 3 hình vuông kích thước $2^{k-1} \times 2^{k-1}$ (như trong hình 1).



Hình 1



Hình 2

Dễ thấy các hình chữ nhật thu được đều có độ dài một cạnh chia hết cho 3 nên chúng được lát bởi các mino 1×3 theo Bổ đề 1.
Hình L gồm 3 ô vuông $2^{k-1} \times 2^{k-1}$ theo giả thiết quy nạp lạt được bởi các mino 1×3và một mino L. Trở lại bài toán.
Với $n = 1$ thì bài toán hiển nhiên đúng.
Giả sử kết luận của bài toán đúng với $n = k - 1 \geq 1$. Xét một hình vuông kích thước $2^k \times 2^k$ ô vuông. Chia hình vuông này thành 4 hình vuông bằng nhau thì ô trống sẽ rời vào một trong 4 hình vuông này, chẳng hạn rời vào góc phần tư thứ nhất (hình 2). Theo giả thiết quy nạp thì cần không quá $k - 1$ mino L để lát hình vuông ở góc phần tư thứ nhất. Để lát hình L gồm 3 hình vuông kích thức $2^{k-1} \times 2^{k-1}$, thì theo Bổ đề 2 ta cần một mino L. Do đó, ta cần không qua $(k - 1) + 1 = k$ mino L để lát căn phòng kích thước $2^k \times 2^k$.
Vậy bài toán được chứng minh.

□

Bài toán 10. *Cho bảng ô vuông $(2n + 1) \times (2n + 1)$ với $n \geq 3$, ta điền vào các ô vuông đơn vị của bảng các số $0, 1$ xen kẻ nhau. Biết bốn ô vuông ở bốn góc của bảng đều được điền số 1. Tìm số k nhỏ nhất các hình chữ L (hình vuông 2×2 bỏ đi một ô vuông bất kỳ) sao cho có thể phủ tất cả các ô vuông chứa số 1 bởi k hình chữ L không chồng lên nhau.*

Lời giải. Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp số hình chữ L ít nhất cần dùng là $(n + 1)^2$.
Thật vậy, với bảng $(2n + 1) \times (2n + 1)$ ô vuông ta xét các ô vuông vị trí (i, j) với i, j lẻ. Rõ ràng các ô đó chứa số 1 và mỗi hình chữ L chỉ chứa được một ô.
Mặt khác số các ô vuông vị trí (i, j) với $i,\ j$ lẻ là $(n + 1)^2$. Vì vậy số hình chữ L cần dùng tối thiểu là $(n + 1)^2$.
Ta sẽ chứng minh có thể dùng $(n + 1)^2$ để phủ được theo yêu cầu của bài toán.
Khi $n = 3$ ta dễ thấy phủ được bảng ô vuông 7×7 bằng 16 hình chữ L.
Cách vẽ như ở bảng bên dưới (thể hiện 8 hình chữ L ở phần trên, phần còn dưới làm tương tự bằng cách lấy đối xứng qua ô ở vị trí $(4; 4)$).

1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0	1

Giả sử với bảng $(2n+1)\times(2n+1)$ có thể phủ được bởi $(n+1)^2$ hình chữ L thỏa mãn. Xét bảng $(2n+3)\times(2n+3)$, chia bảng này thành 4 bảng con đó là

$$(2n+1)\times(2n+1);\ 2\times 2;\ 2\times(2n+1);\ (2n+1)\times 2.$$

Ta thấy mỗi bảng $(2n+1)\times 2$ và $2\times(2n+1)$ có thể phủ được bằng $n+1$ hình chữ L, cụ thể như sau:
Đối với hình $2\times(2n+1)$ chia làm 2 phần gồm 1 hình 2×3 và $(n-1)$ hình 2×2. Hình 2×3 phủ bởi 2 hình chữ L; mỗi hình 2×2 phủ bởi 1 hình chữ L, như vậy có $n+1$ hình chữ L phủ hết các chữ số 1 của hình $2\times(2n+1)$. Tương tự cho hình $(2n+1)\times 2$.
Bảng 2×2 có thể phủ được bằng một hình chữ L.
Do đó theo giả thiết quy nạp thì số hình chữ L có thể dùng để phủ là

$$(n+1)^2+2(n+1)+1=(n+2)^2.$$

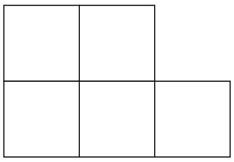
Do đó ta có điều phải chứng minh.
Kết luận $k=(n+1)^2$.

□

0.0.1. Bài tập

Bài 1 (VMO 1992)**.** Cho bảng 1991×1992. Kí hiệu $(m,\ n)$ là ô vuông nằm ở giao của hàng thứ m và cột thứ n.Tô màu các ô vuông của bảng theo quy tắc sau: Lần thứ nhất tô 3 ô (r,s), $(r+1,s+1)$, $(r+2,s+1)$, $1\le r\le 1989,\ 1\le s\le 1990$. Từ lần thứ hai, mỗi lần tô đúng 3 ô chưa có màu nằm cạnh nhau trong cùng một hàng hoặc cùng một cột.Hỏi bằng cách đó có thể tô màu được tất cả các ô của bảng hay không ?

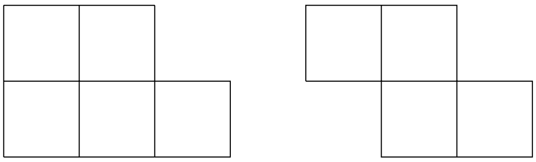
Bài 2. Xét bảng ô vuông kích thước $5\times n$, $n\in\mathbb{N}^*$ (bảng gồm 5 hàng và n cột). Hỏi với n nào thì có thể lát được bảng bởi các viên gạch có dạng như hình bên dưới (hình có thể xoay theo hướng bất kì).



Bài 3. Bàn cờ 2020×2022 bị mất đi 2 ô ở 2 góc đối diện. Hỏi có thể phủ kín phần còn lại của bàn cờ bởi các domino 1×2 được hay không?

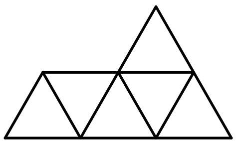
Bài 4. Cho bảng ô vuông 2023×2023. Hỏi có thể phủ kín bảng bởi các quân cờ 2×2 và 3×3.

Bài 5. Gọi hình chữ nhật 2×3 (hoặc 3×2) bị cắt bỏ một ô vuông 1×1 ở góc được gọi là hình chữ nhật khuyết đơn (Hình 1). Hình chữ nhật 2×3 (hoặc 3×2) bị cắt bỏ hai hình vuông 1×1 nằm ở hai góc đối diện là hình chữ nhật khuyết kép (Hình 2). Người ta ghép một số hình vuông 2×2, một số hình chữ nhật khuyết đơn và một số hình chữ nhật khuyết kép sao cho không có hai hình nào chờm lên nhau để tạo thành một hình chữ nhật kích thước 1993×2000. Gọi s là tổng số hình vuông 2×2 và hình chữ nhật khuyết kép trong mỗi cách ghép nói trên. Chứng minh rằng $s \leq 994000$.



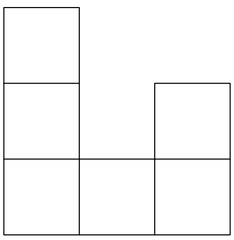
Hình 1 Hình 2

Bài 6. Cho tam giác đều cạnh n được chia thành các tam giác đều có cạnh bằng 1 bởi cách đường thẳng song song với cạnh. Người ta phủ kín tam giác đều bởi các hình được ghép từ 6 tam giác đều như hình bên sao cho các hình không chờm lên nhau (có thể xoay hoặc lật các hình này).



Hãy xác định các giá trị của n để có thể thực hiện được điều đó?

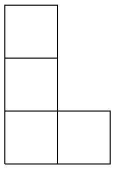
Bài 7. Ta định nghĩa viên gạch hình móc câu là hình gồm 6 ô vuông đơn vị như vẽ bên, hoặc hình nhận được do lật hình đó (sang trái, sang phải, lên trên, xuống dưới) hoặc hình nhận được do xoay hình đó đi một góc.



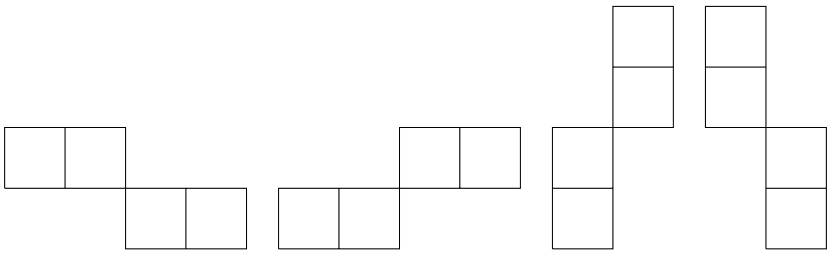
Hãy xác định tất cả các hình chữ nhật $m \times n$, trong đó m, n là các số nguyên dương sao cho có thể lát hình chữ nhật đó bằng các viên gạch hình móc câu?

Bài 8. Cho $m,\ n$ là hai số nguyên dương $m < n$. Xét bảng ô vuông $n \times n$ bỏ đi bảng ô vuông $m \times m$ ở góc trên cùng bên trái. Tìm các cặp (n, m) sao cho ta có thể phủ bảng bởi các quân cờ 1×3.

Bài 9 (Romania TST 2000)**.** Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(m,\ n)$, sao cho bảng $m \times n$ có thể lát được bởi các quân hình chữ L như hình bến (cùng với các hình tạo bởi bằng cách quay đi một góc tùy ý)



Bài 10 (VMO 2006)**.** Xét bảng ô vuông $m \times n$ $(m, n \geq 4)$. Thực hiện trò chơi sau: mỗi lần đặt 4 viên bi vào 4 ô của bảng (mỗi ô một viên) mà 4 ô đó tạo thành một trong các hình dưới đây



Hỏi sau một số lần thực hiện có thể nhận được bảng mà số bi ở mỗi ô bằng nhau được hay không nếu

1. $m = 2004,\ n = 2006,$
2. $m = 2005,\ n = 2006.$

Bài 11. Một bảng 8×8 được bao phủ bởi 21 viên gạch 1×3 và một hình vuông đơn vị. Tìm tất cả các vị trí có thể có của hình vuông đơn vị.

Bài 12. Cho n là số nguyên dương. Chứng minh rằng số cách phủ bảng $2n \times 2n$ bởi các hình chữ nhật 1×2 ít hơn số cách phủ bảng $3n \times 3n$ bởi các hình chữ nhật 1×3.

VỀ HAI BÀI TOÁN TỔ HỢP TRONG ĐỀ KIỂM TRA TRƯỜNG HÈ 2022

Lê Phúc Lữ
(ĐH Khoa học tự nhiên TPHCM)

TÓM TẮT

Trong bài viết ngắn này, tác giả giới thiệu và phân tích về hai bài toán Tổ hợp khá thú vị trong đề kiểm tra của hai kỳ Olympic trong hè 2022: Duyên hải Bắc Bộ và trường hè VIASM.

1. Bài toán về Hamming distance

1.1. Giới thiệu bài toán

Trong đề Olympic Duyên hải Bắc Bộ 2022, khối 10 có bài tổ hợp rất thú vị do trường THPT Chuyên Lê Hồng Phong (Nam Định) đề xuất với nội dung (được tóm tắt lại) như sau

Bài toán 1. *Cho $n \geq 3$ là số nguyên dương và S là tập hợp tất cả các xâu nhị phân độ dài n. Xét $R \subset S$ sao cho với mọi cặp xâu nhị phân $a, b \in R$ thì $d(a,b) \geq 3$, trong đó $d : S^2 \to \mathbb{R}$ cho biết số vị trí khác nhau giữa hai xâu. Chứng minh rằng*

$$|R| \leq \frac{2^n}{n+1}.$$

Bình luận và lời giải. Khoảng cách d trong đề bài chính là khoảng cách Hamming giữa hai xâu nhị phân. Bài toán khảo sát kích thước lớn nhất của R cũng là một bài toán kinh điển của Khoa học máy tính, liên quan đến lý thuyết "mã sửa sai" và có ứng dụng trong thực tiễn. Chặn dưới 3 cũng được ưa chuộng nghiên cứu hơn so với các chặn khác vì kích thước của tập xây dựng được tương đối tốt theo nhiều nghĩa.

Tham khảo ý tưởng của đáp án đề thi tại [4], bên dưới là phần trình bày lại theo hướng đếm bằng hai cách (có thể sẽ dễ hiểu hơn)

Lời giải. Ta đếm số bộ (x, y) trong đó $x \in R, y \in S$ mà $d(x, y) \leq 1$.

1. Cách 1, đếm theo x: chọn $x \in R$ tùy ý có $|R|$ cách, chọn $y \in S$ để $d(x, y) = 0$ hoặc $d(x, y) = 1$, dễ thấy lần lượt có 1 và n cách (ta thay đổi từng vị trí trong xâu x để thu được xâu mới). Do đó, số bộ ở đây là $|R|\,(n + 1)$.

2. Cách 2, đếm theo y: chọn $y \in S$ tùy ý có 2^n cách, chọn $x \in R$ để có $d(x, y) \leq 1$ thì có không quá 1 cách. Thật vậy, nếu có $x_1, x_2 \in R$ để $d(x_1, y) \leq 1,\ d(x_2, y) \leq 1$ thì dễ thấy hai xâu x_1, x_2 chỉ khác nhau ở tối đa 2 vị trí, không thỏa cách chọn tập hợp R.

Từ đó số bộ sẽ không quá 2^n. So sánh với cách 1, ta có ngay $|R|\,(n+1) \leq 2^n$ hay $|R| \leq \frac{2^n}{n+1}$. □

Nhận xét. Qua lời giải trên, bằng cách làm tương tự cho bài toán tổng quát, ta có thể phát biểu kết quả sau: Cho n, ℓ, q là các số nguyên dương và S là tập hợp tất cả các xâu $q-$phân độ dài n (mỗi vị trí có thể nhận giá thuộc $\{0, 1, \ldots, q-1\}$). Xét $R \subset S$ sao cho với mọi cặp xâu $q-$phân $a, b \in R$ thì $d(a, b) \geq \ell$. Khi đó

$$|R| \leq \frac{q^n}{\sum\limits_{k=0}^{(\ell-1)/2} C_n^k (q-1)^k}.$$

Tiếp theo, trở lại vấn đề ở Bài toán 1, ta có thể đặt ra câu hỏi: "vậy tập R có thể có kích thước lớn khoảng bao nhiêu?". Để trả lời, ta có thể tìm cách xây dựng cụ thể một tập R thỏa mãn, nhưng điều này không dễ và theo [1], ta phải dùng đến ma trận Hadamard là một ý tưởng cao cấp. Bên dưới, ta có một hướng sơ cấp hơn dùng kỹ thuật cực hạn quen thuộc.

Gọi R_0 là tập hợp nhiều nhất các xâu nhị phân có thể có, đặt $|R_0| = k$ và $|S \backslash R_0| = 2^n - k$. Ta thấy rằng với mỗi xâu $y \in S \backslash R_0$, tồn tại ít nhất một xâu $x \in R_0$ mà $d(x, y) \leq 2$; vì nếu không có xâu x nào như thế, ta hoàn toàn có thể thêm y vào R_0 và được tập mới nhiều phần tử hơn, mâu thuẫn với tính lớn nhất.

Cách đánh giá. Ngoài ra, với mỗi xâu $x \in R_0$, ta có đúng

$$n + C_n^2 = \frac{n^2 + n}{2}$$

xâu $y \in S \backslash R_0$ mà $d(x, y) \in \{1, 2\}$. Do đó, bằng cách đếm số bộ (x, y) với $x \in R_0, y \in S \backslash R_0$ mà $d(x, y) \leq 2$, ta suy ra được

$$k \cdot \frac{n^2 + n}{2} \geq 2^n - k \text{ hay } k \geq \frac{2^{n+1}}{n^2 + n + 2}.$$

Tất nhiên, đánh giá chặn dưới trên khá yếu và chỉ mới chỉ ra sự tồn tại chứ cũng chưa xây dựng cụ thể được. Tham khảo trong [1], bạn đọc có thể tìm ra một chặn dưới tốt hơn là

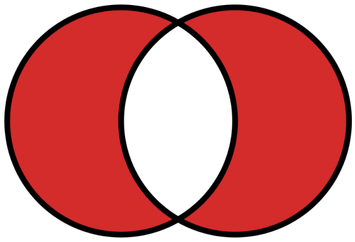
$$|R_0| \geq 2^{n - \lfloor \log_2 n \rfloor - 1} \geq \frac{2^{n-2}}{n}.$$

Việc tìm ra chính xác giá trị $|R_0|$ cho mọi n nguyên dương tùy ý vẫn còn là bài toán mở mà các nhà Toán học theo đuổi hàng mấy chục năm nay [1].

1.2. Các vấn đề liên quan khác

Chú ý rằng ở khía cạnh tập con, ta có một liên hệ khá thú vị với khoảng cách Hamming ở trên như sau: một xâu nhị phân $s = a_1a_2\dots a_n$ với $a_i \in \{0,1\}, \forall i = 1,2,\dots,n$ ứng với tập con $B \subset A$ cho biết từng phần tử của tập nguồn $A = \{1,2,\dots,n\}$ có thuộc B hay không. Số xâu nhị phân là 2^n cũng ứng với số tập con đó. Như thế, với hai tập con $X, Y \subset A$ thì khoảng cách Hamming giữa hai xâu nhị phân tương ứng chính là số phần tử của "hiệu đối xứng" (symmetric difference), cụ thể là

$$X \,\Delta\, Y = (X \cup Y) \backslash (X \cap Y) = (X \backslash Y) \cup (Y \backslash X).$$



Bên dưới, ta xét hai bài toán có liên quan về việc ước lượng này trong các đề Olympic

Bài toán 2. *(Chọn đội tuyển PTNK 2013) Cho số nguyên dương n và tập $X = \{1,2,\dots,4n\}$. Xét họ Ω gồm m tập con của X đôi một có hiệu đối xứng kích thước không nhỏ hơn $2n+1$. Chứng minh rằng*

$$m \leq \frac{4(n+1)}{3}.$$

Lời giải. Nếu thực hiện đếm bằng hai cách thuần túy, ta chỉ có ước lượng $m \leq 2n$. Cụ thể là đếm số bộ $(\{A,B\},c)$ trong đó $A, B \in \Omega$ và $c \in A\Delta B$.

Đếm theo cặp tập con $\{A,B\}$, ta có C_m^2 cách; chọn phần tử c thì có $\geq 2n+1$ nên số bộ sẽ $\geq (2n+1)C_m^2$.

Đếm theo phần tử c, ta có $4n$ cách. Chú ý rằng nếu phần tử $u \in X$ thuộc về x tập và không thuộc $m-x$ tập thì số cách chọn $\{A,B\}$ sẽ là $x(m-x) \leq \frac{m^2}{4}$, kéo theo số bộ là

$$\leq 4n \cdot \frac{m^2}{4} = nm^2.$$

Do đó $nm^2 \geq \frac{m(m-1)}{2}(2n+1)$ hay $m \leq 2n+1$. Chú ý là dấu bằng không xảy ra vì khi $m = 2n+1$ là số lẻ thì đẳng thức $x(m-x) = \frac{m^2}{4}$ không đạt được. Do đó ta phải có $m \leq 2n$.

Ta sẽ cải tiến thêm đánh giá như sau: chú ý rằng

$$|A\Delta B| = |A| + |B| - 2\,|A \cap B|$$

có cùng tính chẵn lẻ với $|A| + |B|$. Do đó, nếu bằng cách nào đó, ta có thể điều chỉnh được $|A| + |B|$ chẵn thì sẽ có ngay $|A\Delta B| \geq 2n + 2$. Cụ thể như sau: "mượn" thêm số 0 cho vào tập nguồn X, ta được

$$X' = \{0, 1, 2, \ldots, 4n\}.$$

Trong họ Ω, nếu tập con A có số phần tử chẵn thì giữ nguyên; nếu tập con A có lẻ phần tử thì bổ sung thêm 0 vào. Khi đó, họ Ω' mới vẫn có m tập con mà số phần tử mỗi tập đều chẵn, ta có ngay $|A'\Delta B'| \geq 2n + 2$ với mọi $A', B' \in \Omega'$. Thực hiện hoàn toàn tương tự trên thì

$$m \geq \frac{4(n+1)}{3}.$$

□

Ta có một ứng dụng trực tiếp của đánh giá trên vào đề Olympic Toán toàn Nga là

Bài toán 3. *Một loại thực vật có 100 đặc trưng và phòng thí nghiệm đang có chứa m mẫu cây của thực vật đó, sao cho mỗi cặp mẫu sẽ có giống nhau ít hơn 50% đặc trưng. Chứng minh rằng $m \leq 34$.*

Tiếp theo là một bài toán khá thú vị khác

Bài toán 4. *(Đề kiểm tra trường Đông Vinh 2021) Xét số nguyên dương n và tập hợp X gồm n số nguyên dương đầu tiên. Giả sử tồn tại họ Ω gồm đúng $\sqrt[5]{2^n}$ tập con của X sao cho với mọi $A \subset X$, tồn tại duy nhất $B \in \Omega$ để*

$$|A \Delta B| \in \{0, 2, 4\}.$$

Xác định tất cả giá trị có thể có của n.

Lời giải. Trước hết, vì $|\Omega| = \sqrt[5]{2^n}$ nên $5|n$. Xét $A, B \subset X$ và tương ứng với hai xâu nhị phân biểu diễn là x, y. Ứng với mỗi xâu $B \in \Omega$, bằng cách chọn ra k vị trí bất kỳ trong xâu và đổi trạng thái $1 \leftrightarrow 0$ là sẽ được một xâu mới, tương ứng với một tập $A \subset X$ mà $|A\Delta B| = k$.

Do đó, lần lượt cho $k = 0, 2, 4$ và chọn ra các phần tử như trên, ta sẽ sinh ra được không quá $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4$ tập hợp A có tính chất $|A\Delta B| \in \{0, 2, 4\}$ (do các tập sinh ra có thể trùng nhau). Đến đây, gọi Φ là họ tất cả tập con của X. Ta sẽ đếm số cặp tập hợp (A, B) với $A \in \Phi,\ B \in \Omega$ sao cho $|A\Delta B| \in \{0, 2, 4\}$.

- Đếm theo A : chọn A có 2^n cách, chọn B có duy nhất 1 cách.
- Đếm theo B : chọn B có $\sqrt[5]{2^n}$ cách, mỗi tập B có không quá $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4$ tập A.

Như thế, ta có đánh giá

$$2^n \leq \sqrt[5]{2^n}(1 + C_n^2 + C_n^4)$$

hay

$$\sqrt[5]{16^n} \leq (1 + C_n^2 + C_n^4).$$

Dùng quy nạp, ta chỉ ra được bất đẳng thức trên sẽ sai với $n \geq 15$. Do đó $n \leq 10$ và $n \in \{5, 10\}$. Ta xét các trường hợp sau đây:

Với $n = 5$, ta có $|\Omega| = 2$ nên chọn $\Omega = \{\varnothing, X\}$ ứng với 2 xâu nhị phân

$$x = \overline{00000} \text{ và } y = \overline{11111}.$$

Dễ thấy rằng với mọi xâu nhị phân z có độ dài 5, ta luôn có $d(z, x) + d(z, y) = 5$ nên có đúng một trong hai số này là chẵn, tức là thuộc $\{0, 2, 4\}$. Do đó $n = 5$ thỏa mãn.

Với $n = 10$, ta có $|\Omega| = 4$ nên chọn

$$\Omega = \{\varnothing, \{1, 2, 3, 4, 5\}, \{6, 7, 8, 9, 10\}, X\}$$

lần lượt ứng với các xâu nhị phân xx, yx, xy, yy ghép được từ hai xâu $x = \overline{00000}$ và $y = \overline{11111}$. Xét một xâu $z = z_1 z_2$ với z_1, z_2 độ dài 5, rõ ràng ta cũng có

$$d(z_1, x) + d(z_1, y) = 5 \text{ và } d(z_2, x) + d(z_2, y) = 5.$$

Suy ra trong $d(z_1, x), d(z_1, y)$ có một số chẵn và một số lẻ. Tương tự với $d(z_2, x), d(z_2, y)$.Tổng của cặp số chẵn và cặp số lẻ đều chẵn và dĩ nhiên có đúng một trong hai tổng nhỏ hơn 5 nên có đúng một trong 4 xâu thỏa mãn khoảng cách đến z thuộc $\{0, 2, 4\}$.

Vậy tất cả các giá trị n cần tìm là $n = 5$ và $n = 10$. □

Để kết thúc chủ đề này, ta sẽ thảo luận về vấn đề hiệu đối xứng trên nhiều tập. Bằng quy nạp, ta có thể chỉ ra được rằng nếu lấy hiệu đối xứng lần lượt của k tập $X_1, X_2, \ldots, X_k$ thì

$$x \in (X_1 \,\Delta\, X_2 \,\Delta\, \ldots \,\Delta\, X_k) \Leftrightarrow x \text{ thuộc lẻ tập trong } k \text{ tập trên.}$$

Chú ý là điều này khó định nghĩa hơn ở Hamming distance. Từ ý tưởng trên, mời bạn đọc chỉ ra sự tương đương của hai bài toán sau và giải quyết chúng (tham khảo thêm tại [7])

Bài toán 5. *(Chọn đội tuyển Phú Thọ 2018) Cho tập hợp $S = \{1, 2, \ldots, n\}$. Chứng minh rằng trong $n+1$ tập con khác rỗng bất kỳ của S thì ta luôn có thể chọn ra một số tập $X_1, X_2, \ldots, X_k$ (với $2 \leq k \leq n+1$) sao cho*

$$X_1 \,\Delta\, X_2 \,\Delta\, \ldots \,\Delta\, X_k = \varnothing.$$

Bài toán 6. *Một lớp có $n+1$ học sinh, tham gia vào n câu lạc bộ. Chứng minh rằng có thể chọn ra một tập hợp khác rỗng các bạn học sinh sao cho trong mỗi câu lạc bộ, số học sinh được chọn là chẵn.*

2. Bài toán về phân hoạch cạnh của graph

2.1. Giới thiệu bài toán

Trong đề kiểm tra Thử thách mùa hè trong khuôn khổ chương trình trường hè của VIASM 2022, có bài 8 với nội dung như sau:

Bài toán 7. *Một câu lạc bộ học thuật có n thành viên muốn tổ chức một số buổi chuyên đề. Ở từng buổi, mỗi thành viên sẽ phụ trách đúng một trong ba môn: Toán, Lý, Hóa (mỗi môn có ít nhất một người). Biết rằng với hai thành viên bất kỳ, tồn tại ít nhất một buổi chuyên đề mà họ không cùng phụ trách chung một môn.*

a) Với $n = 9$, giả sử rằng câu lạc bộ tổ chức được đúng 2 buổi chuyên đề. Hỏi sau khi tổ chức xong buổi đầu tiên, câu lạc bộ có bao nhiêu cách phân công thành viên cho buổi thứ hai?

b) Với $n = 2022$, tìm giá trị nhỏ nhất có thể có của số buổi chuyên đề.

Lời giải. (tham khảo [3])

a) Ta thấy trong mỗi buổi, không thể có môn nào có nhiều hơn 3 người vì nếu không, trong buổi sau, do chỉ có 3 môn nên theo nguyên lý Dirichlet, sẽ có hai người tiếp tục phụ trách cùng môn, không thỏa mãn. Điều này cho thấy rằng mỗi môn phải có đúng 3 người phụ trách.

Đánh số các thành viên là $1, 2, \dots, 9$. Không mất tính tổng quát, giả sử buổi đầu tiên thì các nhóm (theo thứ tự môn Toán, Lý, Hóa) sẽ là:

$$(1, 2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9).$$

Trong buổi tiếp theo, các thành viên của mỗi môn sẽ không được thuộc cùng môn nữa, vì thế số cách xếp cho ba người trong mỗi môn sẽ sẽ là $3! = 6$ và số cách phân công là $6^3 = 216$.

b) Gọi k là số buổi chuyên đề mà câu lạc bộ tổ chức được. Trong buổi chuyên đề thứ i với $1 \le i \le k$, gọi A_i, B_i, C_i lần lượt là tập hợp các thành viên tham gia phụ trách từng môn: Toán, Lý, Hóa. Khi đó, với mỗi i, ta có A_i, B_i, C_i là phân hoạch của các thành viên của câu lạc bộ.

Trong mỗi buổi thì các thành viên sẽ có 3 cách chọn môn để phụ trách nên tổng cộng sẽ có tất cả 3^k cách chọn. Nếu $n > 3^k$ thì theo nguyên lý Dirichlet, sẽ có hai thành viên phải có cách chọn giống nhau ở tất cả k buổi. Tuy nhiên, lúc đó hai thành viên sẽ luôn luôn thuộc cùng một môn trong mọi buổi, không thỏa mãn nên phải có $n \le 3^k$.

Ta sẽ chứng minh rằng với $n \le 3^k$ thì luôn xây dựng được. Thật vậy, đổi các số thứ tự của các học sinh từ $0, 1, 2, \dots, n-1$ sang hệ cơ số 3 thì mỗi số sẽ ứng với một xâu tam phân có độ dài không vượt quá $k-1$. Để đồng bộ hóa cho các xâu đó, ta thêm 0 vào đằng trước để tất cả các xâu có cùng độ dài k. Ta định nghĩa quy tắc sau: trong buổi chuyên đề thứ i với $1 \le i \le k$, ta các xâu mà chữ số thứ i cùng là 0 thì vào nhóm môn Toán, tương tự, cùng là 1 thì vào nhóm môn Lý và cùng là 2 thì vào nhóm môn Hóa.

Khi đó, với hai xâu bất kỳ khác nhau, ta thấy chúng phải khác nhau tại một vị trí nào đó, và số thứ tự của vị trí đó sẽ là buổi chuyên đề mà hai thành viên tương ứng tham gia vào hai môn khác nhau, thỏa mãn ràng buộc. Ứng với $n = 2022$, ta có ngay $k \geq \lceil \log_3 2022 \rceil = 7$ và $k = 7$ là giá trị nhỏ nhất cần tìm. $\square$

2.2. Phân tích và mở rộng.

Nếu theo các ý tưởng đếm bằng hai cách thông thường, ta dễ có định hướng sai cho ý b) khi dự đoán số buổi chuyên đề vào khoảng $\sqrt{n}$. Việc phát hiện ra đánh giá chặn dưới là $\log_3 n$ và xây dựng thuận lợi bằng cách dùng xâu tam phân là điều khá bất ngờ.

Không khó để thấy rằng bài toán bên dưới đây chính là ý tưởng gốc của Bài toán 2 ở trên:

Bài toán 8. *Cho graph đơn, vô hướng đầy đủ $G = (V, E)$ có $|V| = n$. Cần tô màu mỗi cạnh của G bởi một trong k màu sao cho không có các cạnh nào cùng màu tạo thành chu trình lẻ. Tìm giá trị nhỏ nhất của k.*

Nói cách khác, ta cần phân hoạch các cạnh của G ra k graph con lưỡng phân (tính chất quen thuộc của graph lưỡng phân là không có chu trình lẻ), tham khảo [2].

Tại sao có sự liên hệ? Ta thấy rằng nếu như phân hoạch được các cạnh của G thành công thì với hai đỉnh bất kỳ, sẽ luôn có một graph con lưỡng phân mà ở đó, chúng không được nối nhau. Phát biểu lại thành ngôn ngữ học sinh – câu lạc bộ và điều chỉnh lại kích thước từ $2 \to 3$,ta có ngay Bài toán 2 ở trên. Như thế, Bài toán 2 và cả lời giải của nó đã "che giấu" được thành công bản chất lý thuyết graph của nó. Một cách tổng quát, ta có thể thay điều kiện nhị phân, tam phân thành $k-$phân bất kỳ, tức là thay ba môn Toán-Lý-Hóa bởi k môn học. Đáp số sẽ là $\lceil \log_k n \rceil$. Ngoài ra, trong [2], tác giả bài viết cũng có đưa ra lời giải nhờ việc dự đoán trước kết quả và sử dụng quy nạp cho cả hai chiều chặn dưới và xây dựng, nhưng khá dài dòng.

2.3. Liên hệ với bài toán về graph khác.

Ý tưởng sử dụng hệ nhị phân, tam phân để việc xây dựng hiệu quả, triệt để hơn cũng có xuất hiện trong bài toán tương tự sau đây từ cuộc thi Olympic về Tin học – Technocup của Nga vào tháng 12/2021, tham khảo [5]. Bài toán đó đã được sử dụng trong đề kiểm tra đội tuyển VMO 2022 với nội dung như sau

Bài toán 9. *Cho các số nguyên dương $n > k \geq 2$. Trong một quốc gia, có n thành phố $A_1, A_2, \ldots, A_n$.Giữa hai thành phố A_i và A_j, có tuyến đường bay từ A_i đến A_j khi và chỉ khi $i < j$. Một hành trình là một dãy gồm nhiều tuyến đường bay liên tiếp nhau và độ dài của nó là số tuyến đường bay trên đó. Người ta cấp phép khai thác cho các đường bay trên bởi các hãng hàng không sao cho mỗi đường bay chỉ được cấp phép cho đúng một hãng, đồng thời mọi hành trình có độ dài k đều có chứa hai tuyến đường bay được cấp phép cho hai hãng khác nhau.*

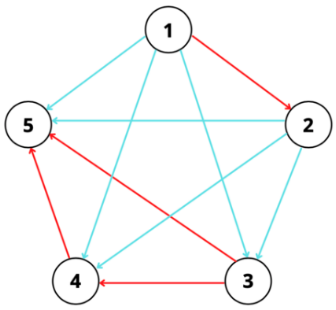
a) Cho $n = 5$, hãy tìm giá trị nhỏ nhất của số hãng hàng không ứng với $k = 3$ và ứng với $k = 2$.

b) Chứng minh rằng số lượng nhỏ nhất các hãng hàng không được cấp phép là $\lceil \log_k n \rceil$,trong đó ký hiệu $\lceil x \rceil$ là số nguyên nhỏ nhất không nhỏ hơn x.

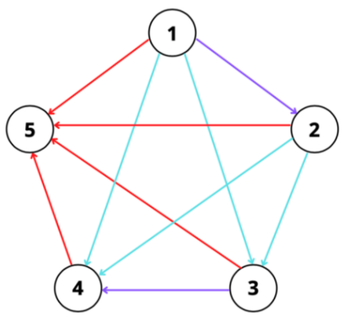
Ta có thể tóm tắt đề bài lại là: Cho graph đơn $G = (V, E)$ có hướng, $|V| = n$ và mỗi đỉnh ứng với đúng một trong n số nguyên dương đầu tiên, ngoài ra cạnh nối từ $i \to j$ khi và chỉ khi $i < j$. Cần tô các cạnh bởi 1 trong k sao cho không có đường đi đơn độ dài k có các cạnh tô cùng màu. Tìm giá trị nhỏ nhất của k.

Lời giải. (tham khảo [6]). Trong lời giải bên dưới, để đơn giản, ta quy ước gọi số thứ tự đại diện cho các thành phố.

a) Với $n = 5, k = 3$, có hành trình $1 \to 2 \to 3 \to 4$ độ dài 3 nên trên đó phải có ít nhất hai đường bay được cấp phép cho hai hãng khác nhau. Khi đó, số hãng hàng không ít nhất là 2. Ta có phương án như sau, mỗi màu đại diện cho một hãng hàng không:



Với $n = 5, k = 2$, rõ ràng phải có ít nhất 2 hãng hàng không X, Y. Giả sử chỉ có hai hãng như thế, xét hành trình $1 \to 2 \to 3,\ 2 \to 3 \to 4$ và $3 \to 4 \to 5$,thì các tuyến $(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)$ phải được cấp phép xen kẽ, giả sử là X, Y, X, Y. Khi đó, xét $1 \to 2 \to 4$ thì $(2, 4)$ cấp phép cho Y; khi đó $2 \to 4 \to 5$ lại có tuyến $(2, 4), (4, 5)$ cùng cấp phép cho Y, không thỏa. Do đó, số hãng hàng không ít nhất là 3 và ta xây dựng như hình:



b) Đầu tiên, để chứng minh số hãng hàng không ít nhất là $\lceil \log_k n \rceil$, ta sẽ chỉ ra rằng nếu có m hãng hàng không thì phải có số thành phố $n \leq k^m$ bằng cách quy nạp theo m. Với $m = 0$ thì rõ ràng không thể có đường bay nào nên $n = 1 = k^0$. Giả sử nếu có không quá $m - 1$ hãng hàng không thì số thành phố không quá k^{m-1}. Bây giờ xét m hãng hàng không và giả sử cấp phép được cho các tuyến bay của n thành phố. Xét một hãng hàng không X trong đó và ta chia các thành phố ra các nhóm. Cụ thể là nhóm thứ i gồm các thành phố a có tính chất: hành trình bay dài nhất chỉ đi qua các tuyến được cấp phép cho X, kết thúc tại a thì có độ dài đúng bằng i. Khi đó, theo ràng buộc của đề bài thì ta sẽ có $0 \le i \le k-1$.

Ta thấy rằng trong mỗi nhóm i, giả sử có hai thành phố b, c với $b < c$ mà chặng (b, c) được cấp phép cho X. Theo định nghĩa thì có hành trình độ dài i kết thúc tại b, kết hợp thêm tuyến (b, c) nữa thì được hành trình độ dài $i+1$ kết thúc tại c, mâu thuẫn. Vì thế, trong mỗi nhóm, không có tuyến nào được cấp phép cho X. Tiếp đến, dễ thấy rằng trong mỗi nhóm, ta cấp phép cho không quá $m-1$ hãng hàng không nên số thành phố trong đó sẽ không quá k^{m-1}, từ đó có $n \le k \cdot k^{m-1} = k^m$. Quy nạp hoàn tất.

Cuối cùng, để xây dựng, ta biểu diễn các số $0, 1, 2, \ldots, n-1$ theo hệ cơ số k thì rõ ràng, mỗi số sẽ có độ dài không vượt quá $m = \lceil \log_k n \rceil$ chữ số. Để chuẩn hóa độ dài cùng là m, với các biểu diễn $k-$phân chưa đủ số lượng chữ số này, ta viết thêm 0 vào trước. Ứng với hai số $a, b \in \{1, 2, \ldots, n\}$ mà chữ số thứ i đầu tiên tính từ trái sang phải của chúng là khác nhau, ta sẽ cấp phép đường bay giữa a, b cho hãng hàng không thứ i. Chú ý rằng nếu a_i, b_i lần lượt là hai chữ số đó thì $a_i < b_i \Leftrightarrow a < b$ (do các vị trí trước đã đó bằng nhau).

$$
\begin{aligned}
a &= a_{m-1} \ldots\ldots a_2 a_1 a_0 \\
b &= b_{m-1} \ldots\ldots b_2 b_1 b_0
\end{aligned}
$$

Ta sẽ chỉ ra cách cấp phép này là thỏa mãn. Thật vậy, giả sử có $k+1$ thành phố mà hành trình bay qua chúng có độ dài k và được cấp phép cho cùng một hãng hàng không thứ i. Giả sử hành trình đó là $x_1 \to x_2 \to \cdots \to x_{k+1}$ thì $x_1 < x_2 < \ldots < x_{k+1}$ và tại vị trí thứ i của các số này, ta cũng có một dãy $k+1$ chữ số sắp tăng ngặt, điều này vô lý vì trong hệ k phân chỉ có k chữ số. Như thế, cách xây dựng trên thỏa mãn điều kiện. Bài toán được giải quyết. $\square$

Cuối cùng, ta phân tích thêm về điểm chung của hai bài toán nêu trên: ta thấy cách đánh giá, cách xây dựng và cả đáp số của hai bài toán 8 và 9 là rất giống nhau. Cũng có thể chỉ ra rằng khi $k = 2$ thì Bài toán 8 cũng tương đương với Bài toán 9. Thật vậy, bởi vì ta có thể tiến hành "vô hướng hóa" graph G trong Bài 9 và sử dụng tính chất không có chu trình lẻ của graph lưỡng phân nên có thể thiết lập được song ánh, tham khảo [8]. Đáng tiếc là với $k > 2$ thì khó có thể chỉ ra sự tương đương nữa.

Một điểm chung khác là các cách xây dựng của cả hai bài cùng có nhược điểm là chưa có tính balanced, tức là sự cân bằng giữa các tập trong phân hoạch, có tập con có kích thước lớn, có tập có kích thước nhỏ. Nếu tìm ra được một cách xây dựng khác đảm bảo được thêm yếu tố này thì biết đâu hai bài toán sẽ có các ứng dụng thực tế thú vị. Tính cân bằng đó cũng có thể hiện trong bài toán sau đây (tham khảo thêm tại [9]):

Bài toán 10. *Cho cây nhị phân hoàn hảo có chiều cao là h, có tổng cộng $2^{h+1} - 1$ đỉnh. Chứng minh rằng có thể phân hoạch các đỉnh của cây ra thành h phần sao cho không có hai đỉnh nào cùng phần là tổ tiên của nhau.*

Tài liệu

[1] Website https://en.wikipedia.org/wiki/Hamming_code.

[2] Trần Nguyễn Nam Hưng, *Các bài toán tổ hợp chọn lọc, bài viết trên group "Hướng tới Olympic Toán VN"*, tháng 02/2021.

[3] Nguyễn Chu Gia Vượng, *Đáp án đề kiểm tra "Thử thách mùa hè" của VIASM năm 2022*.

[4] BTC kỳ thi Duyên hải Bắc Bộ 2022, *Đáp án đề kiểm tra khối 10, năm 2022*.

[5] Tlatoani on codeforces.com, *Editorial for Technocup 2022 — Elimination Round 1 and Codeforces Round 749 (Div. 1+Div. 2), 1586F - Defender of Childhood Dreams*, năm 2021.

[6] Đề kiểm tra chuẩn bị cho kỳ thi VMO 2022, tháng 02/2022.

[7] Vũ Hồng Sơn, *Bài giảng tổ hợp tại trường Đông Vinh năm 2021*.

[8] Hoàng Tiến Nguyên, *Ý tưởng liên hệ giữa bài toán 2.1 và bài toán 2.2*, tháng 03/2022.

[9] Quang Cao, Rinaldo Gagiano, Duy Huynh, Xun Yi, Son Hoang Dau, Phuc Lu Le, Quang-Hung Luu, Emanuele Viterbo, Yu-Chih Huang, Jingge Zhu, Mohammad M. Jalalzai, Chen Feng, *Ancestral Colorings of Perfect Binary Trees With Applications in Private Retrieval of Merkle Proofs*, available at: https://arxiv.org/abs/2205.05211.

TỔ HỢP QUA CÁC ĐỊNH LÝ VÀ BÀI TOÁN

Trần Nam Dũng
Trường ĐH KHTN ĐHQG Thành phố Hồ Chí Minh

1. Một số định lý cơ bản trong tổ hợp

Cho F là họ các tập con của X. Với x thuộc x, ta gọi $d(x)$ là số phần tử của F chứa x.

Định lý 1. *Cho F là họ các tập con của tập hợp X. Khi đó*

$$\sum_{x\in X} d(x) = \sum_{A\in F} |A|.$$

Chứng minh. Xét ma trận kề $M = (m_x, A)$ của F. Nghĩa là M là ma trận $0-1$ với $|X|$ dòng đánh số bởi các điểm $x \in X$ và $|F|$ cột đánh số bởi tập $A \in F$ sao cho $m_{x,A} = 1$ khi và chỉ khi $x \in A$. Để ý rằng $d(x)$ bằng số số 1 trên dòng thứ x còn $|A|$ là số số 1 trên cột thứ A. Như vậy cả vế trái và vế phải đều biểu diễn số số 1 của M. □

Nếu ta xét đồ thị $G = (V, E)$ trên tập đỉnh V như một họ các tập con 2 phần tử của V thì ta có định lý Euler.

Định lý 2 (Euler, 1736). *Trong mọi đồ thị, tổng bậc các đỉnh của nó bằng hai lần số cạnh của nó và như thế, luôn là một số chẵn.*

Định lý sau có thể được chứng minh bằng cách tương tự

Định lý 3. $\sum_{x\in Y} d(x) = \sum_{A\in F} |Y \cap A|$ *với mọi* $Y \subseteq X$.

$$\sum_{x\in X} d(x)^2 = \sum_{A\in F}\sum_{x\in A} d(x) = \sum_{A\in F}\sum_{B\in F} |A \cap B|.$$

(Hai tổng ở đẳng thức đầu ứng với số số 1 trên các hàng Y. Các tổng ở đẳng thức thứ hai đếm số lần xuất hiện của x trong các tập có dạng $A \cap B$).

Trường hợp đặc biệt khi $F = E$ là tập con 2 phần tử, ta có

Định lý 4. *Với đồ thị $G = (V, E)$, ta có*

$$\sum_{x \in V} d(x)^2 = \sum_{(x,y)\in E} (d(x) + d(y)).$$

Định lý 5 (Hall, 1935). *Cho đồ thị hai phe X, Y. Với mỗi tập con A thuộc X, gọi $G(A)$ là tập các đỉnh thuộc Y kề với một đỉnh nào đó thuộc A. Khi đó điều kiện cần và đủ để tồn tại một đơn ánh $f : X \to Y$ sao cho x kề $f(x)$ là $|G(A)| \geqslant |A|$ với mọi A khác rỗng thuộc X.*

Chứng minh. Điều kiện cần là hiển nhiên: Nếu tồn tại đơn ánh f thì với mỗi $A = x_1, x_2, \ldots, x_r$ thuộc X, ta có $G(A)$ chứa các phần tử phân biệt $f(x_1), \ldots, f(x_r)$, do đó $|G(A)| \geqslant r = |A|$.

Ta chứng minh điều kiện đủ bằng quy nạp theo $|X|$. Khi $|X| = 1$, khẳng định là hiển nhiên. Giả sử định lý đã đúng với các tập X với $|X| < n$. Giả sử bây giờ $|X| = n$. Ta xét hai trường hợp:

(1) Giả sử với mọi $A \subset X$ $(A \neq X)$, ta có $|G(A)| > |A|$. Chọn một phần tử x_0 bất kỳ thuộc X, theo điều kiện $|G(x_0)| \geqslant 1$, do đó tồn tại y_0 thuộc Y kề với X. Ta đặt $f(x_0) = y_0$. Bây giờ xét $X' = X \setminus \{x\}$ và $Y' = Y \setminus \{y\}$, $A \subset X'$ và $G'(A)$ là tập các đỉnh thuộc Y' kề với A. Khi đó $|G'(A)| \geqslant |G(A)| - 1e|A|$. Vì $|X'| < |X|$ nên theo giả thiết quy nạp, tồn tại đơn ánh $f : X' \to Y'$ sao cho $f(x)$ kề x với mọi x thuộc x'. Bổ sung thêm $f(x_0) = y_0$ ta được đơn ánh $f : X \to Y$ thỏa mãn yêu cầu định lý.

(2) Trong trường hợp ngược lại, tồn tại $A \subset X$ $(A \neq X)$ sao cho $|G(A)| = |A|$. Khi đó, do $|A| < |X|$ nên tồn tại đơn ánh $f : A \to G(A)$. Xét $X' = X \setminus A$, $Y' = Y \setminus G(A)$. Xét B thuộc X' và $G(B)$ là tập các đỉnh thuộc Y' kề với B. Nếu $|G(B)| < |B|$ thì ta có

$$|G(A \cup B)| = |G(A)| + |G(B)| < |A| + |B| = |A \cup B|.$$

Điều này mâu thuẫn với điều kiện định lý. Như vậy ta có $|G(B)| \geqslant |B|$ với mọi B thuộc X'. Theo giả thiết quy nạp, tồn tại đơn ánh $g : X' \to Y'$ sao cho $g(x)$ kề với x. Như vậy, ta có thể xây dựng được đơn ánh $h : X \to Y$ sao cho $h(x)$ kề với x : Cụ thể $h(x) = f(x)$ nếu x thuộc A và $h(x) = g(x)$ nếu x thuộc $X \setminus A$.

Quan hệ $\leqslant$ trên tập hợp X được gọi là một quan hệ thứ tự nếu thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

(i) $x \leqslant x$ với mọi x thuộc X (tính phản xạ).

(ii) Nếu $x \leqslant y$, $y \leqslant x$ thì $x = y$ (tính phản xứng).

(iii) Nếu $x \leqslant y$, $y \leqslant z$ thì $x \leqslant z$ (tính bắc cầu).

Một tập hợp mà trên đó xác định một quan hệ thứ tự được gọi là một tập sắp thứ tự.

Cho X là một tập sắp thứ tự, hai phần tử x và y thuộc X được gọi là so sánh được nếu $x \leqslant y$ hoặc $y \leqslant x$. Trong trường hợp ngược lại, ta nói x và y không so sánh được.

Một tập con C của X được gọi là một xích nếu hai phần tử bất kỳ thuộc C đều so sánh được. Một tập con A của X được gọi là một đối xích nếu hai phần tử bất kỳ thuộc A đều không so sánh được.

Phần tử x thuộc X được gọi là phần tử cực đại nếu từ $x \leqslant y$ suy ra $y = x$. Phần tử x được gọi là cực tiểu nếu từ $y \leqslant x$ suy ra $y = x$. Phần tử x thuộc X được gọi là lớn nhất nếu $x \geqslant y$ với mọi y thuộc X và được gọi là nhỏ nhất nếu $x \leqslant y$ với mọi y thuộc X.

Xích C được gọi là cực đại nếu như không tồn tại một xích $C^{'}$ chứa C với $|C^{'}| > |C|$. Tương tự ta định nghĩa đối xích cực đại. □

Định lý 6 (Dilworth 1950). *Cho một tập sắp thứ tự X. Số phần tử lớn nhất của một đối xích của X bằng số nhỏ nhất các xích rời nhau hợp thành X.*

Lời giải. Gọi $M = \max\{|A| \mid A$ là đối xích$\}$ và m là số nhỏ nhất các xích rời nhau hợp thành X. Như vậy tồn tại đối xích A của X chứa M phần tử. Vì một xích chỉ chứa được nhiều nhất 1 phần tử của 1 đối xích nên rõ ràng ta có $m \geqslant M$.

Ta chứng minh $m \leqslant M$ bằng quy nạp theo $|X|$. Gọi a là một phần tử cực đại của X và M là kích thước của đối xích lớn nhất trong $X^{'} = X \setminus \{a\}$. Khi đó, theo giả thiết quy nạp $X^{'}$ là hợp của M xích rời nhau $C_1, C_2, \ldots, C_M$. Ta cần chứng minh rằng hoặc X chứa đối xích với $M + 1$ phần tử, hoặc X là hợp của M xích. Bây giờ, mọi đối xích kích thước M (M - đối xích) trong $X^{'}$ chứa một phần tử từ mỗi C_i. Gọi a_i là phần tử lớn nhất trong C_i thuộc vào một $M-$đối xích nào đó trong $X^{'}$. Dễ dàng thấy rằng $A = \{a_1, a_2 \ldots, a_M\}$ là một đối xích (nếu chẳng hạn $a_i < a_j$ thì vì a_j thuộc vào một M - đối xích nào đó và đối xích này lại chứa một phần tử b_i của C_i nên theo tính lớn nhất của a_i, ta có $b_i \leqslant a_i < a_j$ điều này mâu thuẫn vì b_i và a_j cùng thuộc một đối xích).

Nếu $A \cup \{a\}$ là một đối xích trong X thì ta có điều phải chứng minh. Trong trường hợp ngược lại, ta có $a > a_i$ với i nào đó. Khi đó $K = \{a\} \cup \{x \in C_i : x \leqslant ai\}$ là một xích trong X và không có $M-$đối xích trong $X \setminus K$ (vì a_i là phần tử lớn nhất của C_i tham gia trong các đối xích như vậy), vì thế $X \setminus K$ là hợp của $M - 1$ xích. □

Chứng minh 2. (Theo H. Tverberg 1967)

(1) Hiển nhiên ta có $m \geqslant M$.

(2) Ta chứng minh $M \geqslant m$ bằng quy nạp theo $|X|$.

(3) Điều này là hiển nhiên nếu $|X| = 0$.

(4) Giả sử C là xích cực đại trong X.

(5) Nếu mọi đối xích trong $X \setminus C$ có nhiều nhất $M - 1$ phần tử thì xong.

(6) Giả sử $\{a_1, \dots, a_M\}$ là một đối xích trong $P \setminus C$.

(7) Định nghĩa $S^- = \{x \in X : \exists i \, [x \leqslant a_i]\}, S^+ \{x \in X : \exists i \, [a_i \leqslant x]\}$.

(8) Vì C là cực đại, phần tử lớn nhất của C không nằm trong S^-.

(9) Theo giả thiết quy nạp, định lý đúng với S^-.

(10) Vì thế, S^- là hợp của M xích rời nhau $S_1^-, \dots, S_M^-$, trong đó $a_i \in S_i^-$.

(11) Giả sử rằng $x \in S_i^-$ và $x > a_i$. Nếu như tồn tại a_j với $x \leqslant a_j$, ta sẽ có $a_i < x \leqslant a_j$ (mâu thuẫn). Vì vậy a_i là phần tử lớn nhất trong S_i^-, $i = 1, \dots, M$.

(12) Làm tương tự đối với S_i^+, ta có a_i là phần tử nhỏ nhất trong S_i^+.

(13) Kết hợp các xích lại ta có điều phải chứng minh.

□

Định lý 7 (Erdös-Ko-Rado). *Một họ giao nhau các k - tập con của N, trong đó $n \geqslant 2k$ chứa tối đa $\binom{n-1}{k-1}$ tập hợp.*

Chứng minh. Ý tưởng là tính cách cặp (π, S) trong đó S là một tập hợp trong họ, π là hoán vị vòng quanh $(\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(n))$ và S là một "*khoảng*" liên tục đối với π.

Một mặt ta có $(n-1)!$ hoán vị vòng quanh và dễ dàng thấy rằng với mỗi một hoán vị như vậy, ta có thể chọn được nhiều nhất k "*khoảng*" đôi một giao nhau. Mặt khác, với mỗi tập hợp S có $k!(n-k)!$ hoán vị vòng quanh mà trong đó S là một khoảng liên tục.

Như vậy $|F| \, k!(n-k)! \leqslant (n-1)!k$ và điều này cho chúng ta định lý Erdös-Ko-Rado.

Quay trở lại một chút về câu "*dễ dàng nhận thấy*". Phần này sử dụng điều kiện $n \geqslant 2k$. Một cách lý luận cho phần này như sau: Xét khoảng J mà phần tử tận cùng bên trái là nằm ở bên trái nhất và chú ý rằng có k khoảng giao với J mà phần tử tận cùng bên trái nằm bên phải z. Một cách khác là xét một khoảng J bào đó có độ dài k và chú ý rằng $2k-2$ khoảng có giao với khoảng này được chia thành $k-1$ cặp mà mỗi cặp chứa hai khoảng không giao nhau. □

Định lý 8 (Sperner, 1927). *Kích thước lớn nhất của họ F các tập con của N là một đối xích đối với quan hệ bao hàm là hệ số nhị thức* $\binom{n}{n/2}$.

Lời giải. (Lubell) Gọi F là một đối xích như vậy và giả sử rằng nó có s_k tập hợp k phần tử. Ta tính các cặp (π, S) trong đó $\pi = ((\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n))$ là một hoán vị của $\{1, 2, \ldots, n\}$ và S là tập hợp thuộc họ có khởi đầu là π, cụ thể là $S = \{\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(k)\}$ với k nào đó. Với mỗi hoán vị π ta tìm được nhiều nhất một khởi đầu S trong họ F(do điều kiện đối xích). Nếu S là một tập hợp k phần tử, ta có thể tìm được đúng $k!(n-k)!$ hoán vị π với S là khởi đầu. Kết hợp hai sự kiện này, ta có $\sum_{k=0}^{n} s_k k!(n-k)! \leqslant n!$ hay nói cách khác $\sum_{k=0}^{n} s_k / \binom{n}{k} \leqslant 1$. Bất đẳng thức này (được gọi là bất đẳng thức LYM) suy ra kết quả cần chứng minh. □

Định lý 9 (Bài toán chia kẹo của Euler). *Số nghiệm nguyên không âm của phương trình*

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n \quad \text{bằng} \quad C_{n+k-1}^{k-1}.$$

Ý tưởng chứng minh là cho tương ứng bộ nghiệm $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ với xâu nhị phân gồm n bit 1 và $k-1$ bit 0 : x_1 số $1, 0, x_2$ số $1, 0 \ldots, 0, x_k$ số 1.

Định lý 10 (Đường đi ngắn nhất trên lưới nguyên). *Số đường đi ngắn nhất trên lưới nguyên từ điểm $A(0,0)$ đến điểm $B(m,n)$ bằng C_{m+n}^m.*

Ý tưởng chứng minh là cho tương ứng một đường đi với bộ mã gồm m bước đi ngang và n bước đi lên.

Định lý 11 (Nguyên lý bao hàm và loại trừ). *Với $A_1, A_2, \ldots, A_n$ là các tập hợp bất kỳ, ta có*

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots + (-1)^{n-1} \left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right|.$$

Các trường hợp đặc biệt

(i) $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

(ii) $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - (|A \cap B| + |B \cap C| + |C \cap A|) + |A \cap B \cap C|$.

Định lý 12 (Ore). *Cho G là đồ thị đơn vô hướng bậc n. Nếu với hai đỉnh không kề nhau u, v bất kỳ ta có $d(u) + d(v) \geqslant n$ thì G là đồ thị Hamilton.*

Định lý 13 (Euler). *Với một đa diện lồi bất kỳ ta luôn có*

$$M - C + D = 2.$$

Trong đó M là số mặt, C là số cạnh và D là số đỉnh.

Định lý 14 (Redei). *Một tournament bất kỳ đều có một đường đi Hamilton (đồ thị có hướng đầy đủ).*

Chứng minh. Xét đường đi dài nhất trong tournament. Giả sử đó là $P = A_1A_2 \cdots A_k$. Nếu tất cả các đỉnh của đồ thị đã thuộc P thì P là đường đi Hamilton. Nếu có đỉnh A không thuộc P thì: AA_1 không là cạnh, vì ngược lại ta có $P' = AA_1A_2 \cdots A_k$ dài hơn P, mâu thuẫn. Suy ra $A_1\, A$ là cạnh. Lúc đó AA_2 không là cạnh vì nếu ngược lại ta có $P' = A_1AA_2\, A_3 \ldots A_k$ dài hơn P. Suy ra $A_2\, A$ là cạnh. Cứ tiếp tục như thế, ta đi đến A_kA là cạnh. Nhưng khi đó $P' = A_1A_2 \ldots A_kA$ dài hơn P, mâu thuẫn.

Nhiều bài toán trò chơi hay biến đổi trạng thái được giải quyết một cách khá hiệu quả nhờ khái niệm bất biến, đơn biến. ☐

Định nghĩa. Cho tập hợp Ω (tập hợp các trạng thái) và tập hợp T (tập hợp các phép biến đổi) các ánh xạ từ $\Omega \to \Omega$. Hàm số $f : \Omega \to R$ được gọi là bất biến đối với cặp (Ω, T) nếu ta có $f(t(\omega)) = f(\omega)$ với mọi ω thuộc Ω và với mọi t thuộc T.

Nguyên lý bất biến. Nếu f là một bất biến của (Ω, T) và $f\,(\omega') \neq f(\omega)$ thì ω' không thể thu được từ ω thông quan các phép biến đổi T.

Nguyên lý Dirichlet, nguyên lý cực hạn, phép quy nạp toán học cũng là những công cụ thường được sử dụng trong phép giải các bài toán tổ hợp.

Nguyên lý Dirichlet. Nhốt $nq + r(r > 0)$ con thỏ vào n cái chuồng thì có một chuồng chứa ít nhất $q + 1$ con thỏ.

Nguyên lý Dirichlet dưới dạng tập hợp: Cho $|E| = n$. Nếu A và B là hai tập con của E sao cho $|A| + |B| > n$ thì $A \cap B \neq \emptyset$.

Mệnh đề. (Cơ sở của nguyên lý cực hạn)

(a) Nếu A là một tập con hữu hạn bất kỳ của R thì A có phần tử lớn nhất và phần tử nhỏ nhất.

(b) Nếu A là một tập con bất kỳ của N thì A có phần tử nhỏ nhất.

Định lý 15 (Định lý Pick về diện tích đa giác trên lưới nguyên). *Cho P là một đa giác có đỉnh là các điểm nguyên trên mặt phẳng, khi đó diện tích của P có thể tính bởi công thức*

$$S(P) = I + \frac{B}{2} - 1.$$

Trong đó B là số điểm nguyên nằm trên chu vi của đa giác, I là số điểm nguyên nằm bên trong đa giác.

Định lý 16 (Turan). *Số lớn nhất các cạnh (ký hiệu là $t_r(n)$) của đồ thị n đỉnh không chứa đồ thị con đầy đủ (r+1) đỉnh đạt được tại đồ thị r phe đầy đủ với n đỉnh, trong đó kích thước của các phần càng gần nhau càng tốt.*

Chứng minh. Thực sự định lý Turan không khó, gần như cách tiếp cận nào cũng có thể thành công. Sau đây là một cách tiếp cận như vậy: Để đơn giản, ta xét trường hợp tam giác. Xét đỉnh v với bậc lớn nhất và chia các đỉnh còn lại của đồ thị thành hai phần: A - các đỉnh kề với v, B - là các đỉnh còn lại. Bây giờ chú ý là các đỉnh thuộc A lập thành một tập hợp độc lập (tức là không có cạnh nối giữa các đỉnh của A). Với mỗi đỉnh thuộc B ta xoá đi tất cả các cạnh chứa đỉnh này và thay vào đó, nối đỉnh này với tất cả các đỉnh thuộc A. Để ý rằng trong đồ thị mới, bậc của mỗi đình đều không nhỏ hơn bậc ở đồ thị ban đầu. Và, hơn nữa, đồ thị mới là đồ thị hai phe (trong đó A là một phe). Cuối cùng ta chỉ cần chứng minh là với đồ thị hai phe thì số cạnh là lớn nhất khi hai phần có số đỉnh càng gần nhau càng tốt.

Sau đây là một chứng minh khác. Xoá đi một đỉnh của đồ thị G với $n+1$ đỉnh không chứa K_r. Số cạnh của đồ thị còn lại không vượt quá $t_r(n)$. Thực hiện điều này đối với tất cả các đỉnh và chú ý rằng một một cạnh được tính $n-1$ lần. Ta thu được rằng số cạnh trong G (và nghĩa là $t_r(n+1)$) không vượt quá phần nguyên trên của $\frac{t_r(n)\cdot(n+1)}{n-1}$. Đánh giá này cho chúng ta kết quả chính xác của bài toán. □

2. Một số bài toán áp dụng

Bài toán 1. *Trong một giải bóng đá có 20 đội tham gia, thi đấu vòng tròn một lượt (kết thúc giải mỗi đội đá với mỗi đội còn lại đúng một trận). Tìm số k lớn nhất sao cho sau mỗi k vòng đấu (mỗi đội đấu k trận) luôn tìm được 3 đội đôi một chưa đá với nhau.*

Lời giải. Ta chứng minh $k = 8$ thỏa mãn yêu cầu đề bài. Trước hết ta chỉ ra rằng tồn tại một cách sắp xếp lịch thi đấu để sau 9 vòng, trong ba đội bất kỳ đều có 2 đội đã thi đấu với nhau.

Thật vậy, chia 20 đội thành 2 bảng, mỗi bảng 10 đội. Ta có thể sắp lịch thi đấu gồm 9 vòng cho từng bảng, và sau 9 vòng tất cả các đội trong một bảng đều đã thi đấu với nhau. Khi đó với 3 đội bóng bất kỳ, theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại hai đội cùng chung một bảng và như vậy đã thi đấu với nhau.

Bây giờ ta sẽ chứng minh sau 8 vòng đấu thì luôn tìm được 3 đội đôi một chưa thi đấu với nhau. Vì 8 vòng đấu thì có 80 trận nên ta chỉ cần chứng minh một kết quả mạnh hơn: Nếu giải đấu mới chỉ đấu 80 trận (bất kỳ) thì chắc chắn sẽ có 3 đội đôi một chưa đấu với nhau.

Ta chứng minh bổ đề quen thuộc sau:

Đồ thị $2n$ đỉnh ($n > 1$) có nhiều hơn hoặc bằng $n^2 + 1$ cạnh chứa ít nhất một tam giác.

Thật vậy, với $n = 2$ khẳng định đúng vì đồ thị 4 đỉnh và 5 cạnh rõ ràng là chứa tam giác. Giả sử mệnh đề đã đúng đến $n = k$. Xét đồ thị G, $2k + 2$ đỉnh có nhiều hơn hoặc bằng $(k + 1)^2 + 1$ cạnh. Xét hai đỉnh A, B kề nhau và xét $G' = G \backslash \{A, B\}$ (đồ thị thu được từ G bằng cách xóa đi hai đỉnh A, B, cạnh AB và tất cả các cạnh có một trong 2 đầu mút là A hoặc B). G' có $2k$ đỉnh. Nếu số cạnh của $G' \geqslant k^2 + 1$ thì theo giả thiết quy nạp, G' chứa tam giác và do đó G chứa tam giác, ta có điều phải chứng minh.

Nếu số cạnh của $G' < k^2+1$ thì số cạnh bị bỏ đi phải lớn hơn $(k+1)^2+1-\left(k^2+1\right) = 2k+1$. Suy ra số cạnh có đúng một trong hai đầu mút là A hoặc $B > 2k$. Áp dụng nguyên lý Dirichlet ta có tồn tại C mà CA, CB đều là cạnh của G và như thế A, B, C tạo thành một tam giác trong G. Vậy trong mọi trường hợp ta đều tìm được tam giác trong G. Theo nguyên lý quy nạp toán học, bổ đề được chứng minh.

Áp dụng bổ đề vào bài toán. Xét đồ thị G có đỉnh là các đội bóng. Hai đỉnh được nối với nhau bởi một cạnh nếu chúng chưa đấu với nhau. Sau 8 vòng đấu có 80 trận, suy ra có $190-80 = 110$ trận chưa đấu, tức là G có 110 cạnh. Vì $110 > 10^2 + 1$ nên theo bổ đề, G chứa tam giác. Và đó chính là 3 đội bóng đôi một chưa đấu với nhau.

Bài toán được giải quyết hoàn toàn. □

Bài toán 2. *Có 20 người xếp thành một vòng tròn. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra 5 người sao cho không có hai người kề nhau được chọn.*

Lời giải. Ta giải các bài toán tổng quát sau

Bài toán 2.1. *Có n người xếp thành một hàng dọc. Có bao nhiêu cách chọn ra k người, sao cho không có hai người kề nhau được chọn?*

Cách 1 (Phương pháp song ánh). Đặt $E_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. Gọi $u_1 < u_2 < \ldots < u_k$ là số thứ tự của những người được chọn thì ta có $u_{i+1} - u_i \geqslant 2$ với mọi $i = 1, \ldots, k-1$.

Đặt $A = \{(u_1, u_2, \ldots, u_k) \in E^k n \mid u_{i+1} - u_i \geqslant 2 \text{ với mọi } i = 1, \ldots, k-1\}$.

Xét ánh xạ $f : A \to B$, trong đó $B = \left\{(v_1, v_2, \ldots, v_k) \in E^{k_{n-k+1}|} \mid v_1 < v_2 < \cdots < v_k\right\}$ xác định như sau

$$f(u_1, u_2, \ldots, u_k) = (v_1, v_2, \ldots, v_k), \quad v_i = u_i - (i-1).$$

Ta kiểm tra $(v_1, v_2, \ldots, v_k) \in B$:

(i) Rõ ràng

$$v_{i+1} - v_i = (u_{i+1} - i) - (u_i - (i-1)) = u_{i+1} - u_i - 1 \geqslant 1.$$

(ii) $v_1 = u_1 \geqslant 1, v_k = u_k - (k-1) \leqslant n - k + 1$. Ta kiểm tra f là một song ánh. Nếu $(u_1, u_2, \ldots, u_k) \neq (u_1', u_2', \ldots, u_k')$ thì rõ ràng ảnh của chúng khác nhau. Suy ra f là một đơn ánh. Ngược lại, với $(v_1, v_2, \ldots, v_k)$ thuộc B, ta chọn $u_i = v_i + i - 1$ thì $(u_1, u_2, \ldots, u_k)$ thuộc A và $f(u_1, \ldots, u_k) = (v_1, v_2, \ldots, v_k)$. Suy ra f là toàn ánh.

Vậy $|A| = |B|$, mà $|B|$ rõ ràng bằng số các tập con k phần tử của E_{n-k+1}, do đó bằng C_{n-k+1}^k

Cách 2 (Sử dụng bài toán chia kẹo của Euler). Giả sử ta chọn được k người. Gọi x_1 là số người tính từng người đầu tiên đến trước người thứ nhất được chọn, x_2 là số người nằm giữa người thứ nhất và người thứ hai, …, x_k là số người nằm giữa người thứ $k-1$ và người thứ k và x_{k+1} là số người nằm sau người thứ k đến cuối. Khi đó ta có

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{k+1} = n - k, \tag{1}$$

và x_1, x_{k+1} là các số nguyên không âm, còn $x_2, \ldots, x_k$ là các số nguyên $\geqslant 1$.

Ngược lại, nếu $(x_1, \ldots, x_{k+1})$ là một nghiệm của (1) với $x_1, x_{k+1} \geqslant 0, x_2, \ldots, x_k \geqslant 1$ thì ta cho tương ứng với cách chọn người thứ $1 + x_1, 2 + x_1 + x_2, \ldots, k + x_1 + \cdots + x_k$ thì rõ ràng do $(i + x_1 + \cdots + x_i) - (i - 1 + x_1 + \cdots + x_{i-1}) = 1 + x_i \geqslant 2$ nên không có 2 người liên tiếp được chọn.

Cuối cùng, đê hoàn tất lời giải bài toán, ta đặt $y_1 = x_1, y_{k+1} = x_{k+1}$ và $y_i = x_i - 1$ với $i = 2, \ldots, k$ thì được

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_{k+1} = n - 2k + 1, \tag{2}$$

với y_i là các số nguyên không âm.

Theo kết quả của định lý chia kẹo của Euler, ta có số nghiệm của (2) bằng C^k_{n-k+1}. Đó cũng chính là kết quả của bài toán ban đầu của chúng ta. $\square$

Bài toán 3. *Có n người xếp thành một vòng tròn. Có bao nhiêu cách chọn ra k người, sao cho không có hai người kề nhau được chọn?*

Lời giải. Bài toán này có thể giải bằng kết quả của bài toán trên và phương pháp "*cắt đường tròn*".

Giả sử n người đó được đánh số $1, 2, \ldots, n$. Ta xét các trường hợp sau:

(1) Người số 1 được chọn. Khi đó người số 2 và số n không được chọn. Như vậy ta phải chọn thêm $k-1$ người từ 3 đến $n-1$ sao cho không có hai người kề nhau được chọn. Vì $n-1$ không kề 3 nên có thể coi đây là $n-3$ người xếp theo một hàng dọc. Theo kết quả của bài toán trên, số cách chọn bằng C^{k-1}_{n-k-1}.

(2) Người số 1 không được chọn. Khi đó ta cần chọn k người từ số 2 đến n sao cho không có 2 người kề nhau được chọn. Vì 2 và n không kề nhau nên có thể coi đây là $n-1$ người xếp theo một hàng dọc. Theo kết quả của bài toán trên, số cách chọn bằng C^k_{n-k}.

Vậy đáp số của bài toán là

$$C^{k-1}_{n-k-1} + C^k_{n-k} = \frac{(n-k-1)!}{(k-1)!(n-2k)!} + \frac{(n-k)!}{k!(n-2k)!} = \frac{(n-k-1)!}{k!(n-2k)!}(k+n-k) = \frac{n}{k}C^{k-1}_{n-k-1}.$$

$\square$

Bài toán 4. *Chứng minh rằng trong một nhóm có 17 người, trong đó mỗi người có đúng 4 người quen, tìm được 2 người không quen nhau và không có người quen chung.*

Lời giải. Ta chuyển sang ngôn ngữ đồ thị, mỗi người tương ứng với 1 đỉnh và hai người quen nhau được nối bằng 1 cạnh.

Giả sử ngược lại với khẳng định bài toán, mọi đỉnh X đều được nối với 1 trong 16 đỉnh còn lại, hoặc là trực tiếp, hoặc là qua một đỉnh thứ 3. Vì X được nối với đúng 4 đỉnh và mỗi một đỉnh này được nối với đúng 3 đỉnh khác, trong đồ thị sẽ không còn đỉnh nào khác và tất cả các đỉnh đã nhắc đến đều khác nhau. Ngoài ra các cạnh còn lại của đồ thị có số lượng là $17 \cdot 4/2 - 16 = 18$ chỉ có thể nối các đỉnh ngoài.

Mỗi một trong 18 cạnh này cho chúng ta một chu trình độ dài 5 đi qua X. Vì X là một đỉnh bất kỳ, qua mỗi một trong 16 đỉnh còn lại cũng có đúng 18 chu trình như vậy. Mỗi một chu trình đi qua đúng 5 đỉnh, suy ra số chu trình bằng $18 \cdot 17/5$ (mâu thuẫn). Như vậy khẳng định bài toán được chứng minh. $\square$

Bài toán 5. *Trên bàn cờ quốc tế có 8 quân xe, đôi một không ăn nhau. Chứng minh rằng trong các khoảng cách đôi một giữa các quân xe, có hai khoảng cách bằng nhau. Khoảng cách giữa hai quân xe bằng khoảng cách giữa tâm các ô vuông mà quân các quân xe đứng.*

Lời giải. Trước hết ta mô hình hoá bài toán. Để ý rằng khoảng cách giữa $o(p,q)$ và ô (m,n) bằng $(p-m)^2+(q-n)^2$. Ta cần chứng minh rằng nếu $p_1, p_2, \ldots, p_8$ là một hoán vị của $(1,2,3,\ldots,8)$ thì tồn tại các tập chỉ số $\{m,n\} \neq \{p,q\}$ sao cho

$$(m-n)^2+(p_m-p_n)^2=(p-q)^2+\left(p_p-p_q\right)^2.$$

Ta thấy 8 quân xe tạo ra 28 khoảng cách. Nhưng nếu ta tìm 2 khoảng cách bằng nhau giữa cả 28 quân xe này thì ta sẽ gặp khó khăn. Ta giới hạn trong việc tìm các cặp chỉ số dạng $\{n, n+1\}$. Có 7 cặp như vậy. Khi đó, ta chỉ cần tìm $n \neq m$ sao cho $(p_{n+1}-p_n)^2=(p_{m+1}-p_m)^2$. Vì $1 \leqslant p_i \leqslant 8$ nếu $(p_{n+1}-p_n)^2$ chỉ có thể là 1 trong 7 giá trị $1^2, 2^2, \ldots, 7^2$. Vì thế chỉ có thể xảy ra hai trường hợp.

- Tồn tại $n \neq m$ sao cho $(p_{n+1}-p_n)^2=(p_{m+1}-p_m)^2$. Khi đó các cặp quân xe tại ô $(n, p_n), (n+1, p_{n+1})$ và $(m, p_m), (m+1, p_{m+1})$ là các cặp xe cần tìm.
- Các số $(p_{n+1}-p_n)^2$ đôi một phân biệt. Khi đó tồn tại n sao cho $(p_{n+1}-p_n)^2=4$.

Lúc này, xoay hàng thành cột, ta lại đi đến việc hoặc tồn tại $n \neq m$ sao cho $(q_{n+1}-q_n)^2=(q_{m+1}-q_m)^2$ hoặc tồn tại k sao cho $(q_{k+1}-q_k)^2=2^2$. Trong trường hợp thứ nhất, bài toán được giải quyết tương tự như trường hợp 1 ở trên. Trong trường hợp thứ hai, các quân xe tại ô $(n, p_n), (n+1, p_{n+1})$ và $(q_{k+1}, k+1), (q_k, k)$ là các cặp xe cần tìm. $\square$

Bài toán 6 (Trận đấu toán học Nga 2010). *Một quốc gia có 210 thành phố. Ban đầu giữa các thành phố chưa có đường. Người ta muốn xây dựng một số con đường một chiều nối giữa các thành phố sao cho: Nếu có đường đi từ A đến B và từ B đến C thì không có đường đi từ A đến C. Hỏi có thể xây dựng được nhiều nhất bao nhiêu đường?*

Lời giải. Gọi A là thành phố có nhiều đường đi nhất (gồm cả đường đi xuất phát từ A và đường đi đến A). Ta chia các thành phố còn lại thành 3 loại. Loại I - Có đường đi xuất phát từ A. Loại

II - Có đường đi đến A. Loại III: Không có đường đi đến A hoặc xuất phát từ A. Đặt $m = |\text{I}|$, $n = |\text{II}|$, $p = |\text{III}|$. Ta có $m + n + p = 209$.

Dễ thấy giữa các thành phố loại I không có đường đi. Tương tự, giữa các thành phố loại II không có đường đi.

Số các đường đi liên quan đến các thành phố loại III không vượt quá $p(m+n)$ (do bậc của $A = m + n$ là lớn nhất).

Tổng số đường đi bao gồm:

- Các đường đi liên quan đến $A : m + n$.
- Các đường đi liên quan đến III: $\leqslant p(m+n)$.
- Các đường đi giữa I và II: $\leqslant mn$.

Suy ra tổng số đường đi nhỏ hơn

$$mn + (p+1)m + (p+1)n \leqslant \frac{(m+n+p+1)^2}{3} = \frac{210^2}{3}.$$

Dấu bằng xảy ra với đồ thị 3 phe, mỗi phe có 70 thành phố, thành phố phe 1 có đường đi đến thành phố phe 2, thành phố phe 2 có đường đi đến thành phố phe 3, thành phố phe 3 có đường đi đến thành phố phe 1. □

Nhận xét. Bài toán này còn có thể giải bằng cách áp dụng định lý Turan (chứng minh giữa 4 thành phố bất kỳ có tối đa 5 con đường).

3. Bài tập rèn luyện

Bài tập 1 (Vietnam TST 2001). Cho số nguyên dương $n > 1$. Trong không gian vuông góc $Oxyz$, gọi T là tập hợp tất cả các điểm có tọa độ là (x, y, z) với x, y, z là các số nguyên dương thỏa mãn $1 \leqslant x, y, z \leqslant n$.

Tô màu tất cả các điểm thuộc tập hợp T sao cho: Nếu điểm $A\,(x_0, y_0, z_0)$ được tô màu thì những điểm có dạng $B\,(x_1, y_1, z_1)$ với $x_1 \leqslant x_0, y_1 \leqslant y_0, z_1 \leqslant z_0$ sẽ không được tô màu. Tìm giá trị lớn nhất các điểm được tô màu thỏa mãn điều kiện trên.

Bài tập 2 (Vietnam TST 2010). Trong một hội nghị có n nước tham gia, mỗi nước có k đại diện ($n > k > 1$). Người ta chia $n \cdot k$ người này thành n nhóm, mỗi nhóm có k người sao cho không có hai người nào cùng nhóm đến từ cùng một nước.

Chứng minh rằng có thể chọn ra một nhóm gồm n người sao cho họ thuộc các nhóm khác nhau và đến từ các nước khác nhau.

Bài tập 3. Trong một đa giác lồi có chứa không ít hơn $m^2 + 1$ điểm nguyên. Chứng minh rằng trong đa giác lồi này tìm được $m + 1$ điểm nguyên cùng nằm trên một đường thẳng.

Bài tập 4. Chứng minh rằng trong 9 người bất kỳ, hoặc có 3 người đôi một quen nhau, hoặc có 4 người đôi một không quen nhau.

Bài tập 5. Chọn ra 69 số nguyên dương từ tập hợp $E = \{1, 2, \ldots, 100\}$. Chứng minh rằng tồn tại 4 số $a < b < c < d$ trong 4 số được chọn sao cho $a + b + c = d$. Kết luận bài toán còn đúng không nếu ta thay 69 bằng 68?

Bài tập 6. Một quốc gia có 16 thành phố và có 36 tuyến bay nối giữa chúng. Chứng minh rằng ta có thể tổ chức một chuyến bay vòng quanh giữa 4 thành phố.

Bài tập 7. Trong một nhóm n người có 3 người đôi một quen nhau và mỗi một người này quen nhiều hơn 1 nửa số người trong nhóm. Tìm số ít nhất có thể số bộ ba người đôi một quen nhau.

Bài tập 8 (Vietnam TST 2009). Một hội nghị toán học có tất cả $6n + 4$ nhà toán học phải họp với nhau đúng $2n + 1$ lần ($n \geqslant 1$). Mỗi lần họp, họ ngồi quanh một cái bàn 4 chỗ và n cái bàn 6 chỗ, các vị trí ngồi chia đều khắp mỗi cái bàn. Biết rằng hai nhà toán học đã ngồi cạnh hoặc đối diện nhau ở một cuộc họp này thì sẽ không được ngồi cạnh hoặc đối diện nhau ở một cuộc họp khác.

(a) Chứng minh rằng Ban tổ chức có thể xếp được chỗ ngồi nếu $n = 1$.

(b) Hỏi rằng Ban tổ chức có thể sắp xếp được chỗ ngồi được hay không với mọi $n > 1$?

Bài tập 9. Trong một nhóm 12 người giữa 9 người bất kỳ có 5 người đôi một quen nhau. Chứng minh rằng trong nhóm này có 6 người đôi một quen nhau.

Bài tập 10 (ARO 2004). Trong một quốc gia có 1001 thành phố. Hai thành phố bất kỳ được nối với nhau bởi một con đường một chiều. Tại mỗi thành phố có đúng 500 con đường đi ra và đúng 500 con đường đi vào. Có 668 thành phố của nước này tách ra thành lập một nước cộng hòa độc lập. Chứng minh rằng từ một thành phố bất kỳ của nước cộng hòa này có thể đến một thành phố bất kỳ khác của nước cộng hòa mà không ra khỏi phạm vi của nước cộng hòa.

Bài tập 11. Trong không gian có $2n$ điểm, trong đó 4 điểm bất kỳ không nằm trên một mặt phẳng. Ta nối n^2+1 đoạn thẳng với đầu mút tại các điểm này. Chứng minh rằng các đoạn thẳng tạo thành:

(a) Ít nhất một tam giác.

(b) Không ít hơn n tam giác.

Bài tập 12. Trong hình chữ nhật diện tích 1 có 5 hình diện tích $\frac{1}{2}$ mỗi hình. Chứng minh rằng tồn tại:

(a) Hai hình có diện tích phần giao không nhỏ hơn $\frac{3}{20}$.

(b) Hai hình có diện tích phần chung không nhỏ hơn $\frac{1}{5}$.

(c) Ba hình có diện tích phần chung không nhỏ hơn $\frac{1}{20}$.

Bài tập 13 (ARO 1999). Các số từ 1 đến 1000000 được tô bằng hai màu trắng và đen. Mỗi bước đi, cho phép chọn ra một số bất kỳ từ 1 đến 1000000 và đổi màu tất cả các số không nguyên tố cùng nhau với số đó thành màu ngược lại (đen thành trắng, trắng thành đen). Hỏi có thể sau một số hững hạn bước đi biến tất cả các số thành màu trắng được không?

Bài tập 14 (Vietnam TST 2003). Cho 4 số nguyên dương m,n,p,q với $p<m$ và $q<n$. Xét 4 điểm $A(0,0)$, $B(p,0)$, $C(m,q)$ và $D(m,n)$ trên mặt phẳng tọa độ. Xét các đường đi f từ A đến D và các đường đi g từ B đến C sao cho khi đi trên f hoặc g, ta chỉ đi theo chiều dương của các trục tọa độ và chỉ đổi hướng tại các điểm có tọa độ nguyên. Gọi S là số các cặp đường đi (f,g) sao cho f và g không có điểm chung. Chứng minh rằng

$$S = C_{m+n}^{n} C_{m+q-p}^{q} - C_{m+q}^{q} C_{m+n-p}^{n}.$$

Bài tập 15. Tìm số các tập con 5 phần tử của $\{1,2,3,\ldots,2000\}$ có tổng các phần tử chia hết cho 5.

Bài tập 16. Tập con M của $\{1,2,\ldots,15\}$ không chứa ba phần tử có tích là số chính phương. Tìm số phần tử lớn nhất của M.

Bài tập 17 (Iran 1999). Giả sử $S=\{1,2,\ldots,n\}$ và $A_1,\ A_2,\ldots,A_k$ là các tập con của S sao cho với mọi $1\leqslant i_1,i_2,i_3,i_4\leqslant k$ ta có

$$|A_{i_1}\cup A_{i_2}\cup A_{i_3}\cup A_{i_4}|\leqslant n-2.$$

Chứng minh rằng $k\leqslant 2^{n-2}$.

BÀI TOÁN HAY - LỜI GIẢI ĐẸP

Nguyễn Duy Liên

GIỚI THIỆU

Chuyên mục này được lấy cảm hứng từ bài viết của thầy Nguyễn Duy Liên ở số 6 về bài toán số 6 trong kỳ thi IMO 2001 với 5 cách giải khác nhau. Mục này sẽ để dành viết về những bài toán hay, lời giải đẹp và những câu chuyện thú vị xung quan những bài toán và lời giải đó.

Tên của chuyên mục được mượn từ tên của một nhóm những người yêu toán trên Facebook do anh Nguyễn Văn Lợi sáng lập "Bài toán hay – Lời giải đẹp – Đam mê toán học". Chuyên mục ghi nhận các đề cử của bạn đọc và sẽ chọn đăng mỗi kỳ 1, 2 bài toán.

Số này chúng tôi sẽ giới thiệu với bạn đọc bài viết của thầy Nguyễn Duy Liên với 5 cách giải cho bài toán số 5 trong đề thi IMO 2022, một bài toán vừa có thể giải bằng lập luận rất sơ cấp, vừa có thể tiếp cận một cách bài bản hơn bằng các công cụ và định lý mạnh của Lý thuyết số.

1. Một số bài toán hay, lời giải đẹp

Bài toán 1. *Tìm tất cả các bộ số nguyên dương* (a, b, p) *với* p *nguyên tố và* $a^p = b! + p$.

Lời giải 1. *Ta chia hai trường hợp sau:*

- *Xét* $p = 2$, *phương trình ban đầu trở thành:* $a^2 = b! + 2 \quad (1)$
  - *Nếu* $b \geq 3$ *thì vế phải của* (1) *chia 3 dư 2 suy ra* $a^2 \equiv 2(\mathrm{mod} 3)$ *vô lý.*
  - *Nếu* $b = 2$ *suy ra* $a^2 = 4$ *hay* $a = 2$ *vậy ta được bộ* $(a, b, p) = (2, 2, 2)$.
  - *Nếu* $b = 1$ *suy ra* $a^2 = 3$ *vô lý.*
- *Xét* $p > 2$

- *Nếu $b < p$ thì do $(p, b!) = 1$ nên $(a^p, b!) = 1$ suy ra $a > b$.*
  Khi đó $a^p - p \geq (b+1)^p - p > b^p > b!$, mâu thuẫn.

- *Nếu $b \geq p$. Khi đó $b! + p$ chia hết cho $p \Rightarrow a \vdots p \Rightarrow a \geq p$.*
  Mặt khác $v_2(b!) = 1$ (ngược lại $v_2(b!) > 1$ từ đó suy ra $p \vdots p^2$ vô lý) suy ra $b < 2p$, kéo theo $a \geq p$. Do $p > 2$ nên ta có

$$a^p = b! + p < (2p)! < p^{2p} \Rightarrow a < p^2$$

  Đặt $a = kp\,(k \in \mathbb{N}^*, 1 \leq k < p)$ thì $a^p \vdots k, b! \vdots k$ suy ra $p \vdots k$. Do đó $k = 1 \Rightarrow a = p$, khi đó phương trình trở thành $p\left(p^{p-1} - 1\right) = b!$ (2)
  Theo định lý bổ đề LTE ta có

$$v_2\left(p^{p-1} - 1\right) = 2v_2(p-1) + v_2(p+1) - 1$$

  Mà từ phương trình ta có $b \geq p + 1$ nên $b\,!$ chứa các ước là $2, \frac{p-1}{2}, p-1, p+1$.
  Hơn nữa tổng số mũ đúng của các ước trên là $2v_2(p-1) + v_2(p+1)$.
  Từ đó để 2 biểu thức bằng nhau thì 4 số trên bắt buộc phải có các số giống nhau, thử các trường hợp ta được $p - 1 = 2 \Rightarrow p = 3$, thay vào ta được $b = 4$.
  Khi đó ta được bộ $(a, b, p) = (3, 4, 3)$.
  Vậy có hai bộ số nguyên dương (a, b, p) thỏa mãn bài toán là $(2, 2, 2)$ và $(3, 4, 3)$.

Lời giải 2. *Giả sử ta có bộ ba (a, b, p) thỏa mãn yêu cầu bài toán. Xét hai trường hợp sau:*

- ***Trường hợp 1:*** $b < p$
  Khi đó $a^p = b! + p < b^p \Rightarrow a < b \Rightarrow b! \vdots a \Rightarrow p \vdots a \Rightarrow a = 1$.
  Từ đó ta có $b! + p = 1$ (vô lý).

- ***Trường hợp 2:*** $b \geq p$ *Khi đó $b! \vdots p \Rightarrow a^p \vdots p \Rightarrow a \vdots p \Rightarrow v_p(b! + p) \geq p \Rightarrow v_p(b!) = 1 \Rightarrow p \leq b < 2p$.*
  Từ đó ta có: $a^p = b! + p < p^{2p} \Rightarrow a < p^2$.
  Giả sử a có ước nguyên tố $q \neq p$, khi đó $b! \equiv -p (\bmod q) \Rightarrow b < q$. Suy ra

$$p^2 > a \geq pq > pb \geq p^2 \text{ (vô lý)}$$

  Vậy a không có ước nguyên tố khác p, mà $a < p^2$ nên $a = p$.
  Vậy phương trình đã cho trở thành $b! = p^p - p$ (3).

  - *Nếu $p = 2$ thì (3) trở thành : $b! = 2$ suy ra $b = 2$ ta được bộ $(a, b, p) = (2, 2, 2)$.*
  - *Nếu $p = 3$ thì (3) trở thành : $b! = 24$ suy ra $b = 4$ ta được bộ $(a, b, p) = (3, 4, 3)$.*

– *Nếu $p \geq 5$ thì ta có*

$$\begin{aligned} v_2\left(p^p - p\right) &= v_2\left(p^{p-1} - 1\right) = v_2(p-1) + v_2(p+1) + v_2(p-1) - 1 \\ &= \begin{cases} v_2\left((p-1)^2\right), p \equiv 1(\bmod 4) \\ v_2\left(p^2 - 1\right), p \equiv 3(\bmod 4) \end{cases} \end{aligned}$$

Mặt khác $v_2(b!) = b - s_2(b) > b - \log_2 b - 1$ (Legendre's).
Từ đó suy ra

$$b - \log_2 b - 1 < \max\left\{v_2\left((p-1)^2\right), v_2\left(p^2-1\right)\right\} vb^2 - 1 \geq p^2 - 1 > 2^{b-\log_2 b - 1} = \frac{2^b}{2b}$$

Suy ra

$$2b^3 - 2b > 2^b \quad (4)$$

Kiểm tra được với bất đẳng (4) sai với $b \geq 12$. Do đó $b \leq 11 \Rightarrow p \leq 11$.

∗ *Với $p = 5$ ta có $v_2(b!) = v_2\left(5^5 - 5\right) = 4$, từ đó có $6 \leq b \leq 7$ ta thử lại thấy không thỏa mãn .*

∗ *Với $p = 7$ ta có $v_2(b!) = v_2\left(7^7 - 7\right) = 4$, từ đó có $6 \leq b \leq 7$ ta thử lại thấy không thỏa mãn .*

∗ *Với $p = 11$ ta có $v_2(b!) = v_2\left(11^{11} - 1\right) = 3$, từ đó có $4 \leq b \leq 5$ ta thử lại thấy không thỏa mãn.*

Vậy có hai bộ số nguyên dương (a, b, p) thỏa mãn bài toán là $(2, 2, 2)$ và $(3, 4, 3)$.

Lời giải 3. *Trước tiên, ta có nhận xét như sau:*

Nhận xét 1. *Với mọi số nguyên tố p ta có bất đẳng thức $1 < 1 + p < 2^p \Leftrightarrow 1 < (1+p)^{\frac{1}{p}} < 2$. Từ đây ta có $b = 1$ không thỏa mãn phương trình $a^p = b! + p$. Ta xét hai trường hợp sau đây.*

- ***Trường hợp 1:** Nếu $2 \leq b < p$.*
  Gọi q là số nguyên tố bất kỳ thỏa mãn $q \mid b! + p = a^p$ thì $q > b$.
  Từ đó dẫn đến : $b! + p \leq b^p < q^p \leq a^p$ khi $2 \leq b < p$, mâu thuẫn.

- ***Trường hợp 2:** Nếu $b \geq p$*
  Thì từ đề bài: $a^p = b! + p$ ta có $a : p$ đặt $a = kp$ (với $k \in \mathbb{Z}^+$). Lưu ý $v_p\left(a^p - p\right) = 1$ vì vậy $b < 2p$ từ đây ta có $1 \leq k < p$.
  Nếu $k > 1$ từ đề bài ta có $(kp)^p \leq (2p-1)! + p$. Lấy một số nguyên tố $r < p, r \mid k$ thì $b > r$, nhưng $(kp)^p > (r-1)! + p$, mâu thuẫn .
  Vậy $k = 1$ hay $a = p$.

Khi đó phương trình ban đầu trở thành $p^p = b! + p \Leftrightarrow p^p - p = b\,!$
Ta có $v_2\left(p^p - p\right) \le 2\log_2(p-1)$ *(bổ đề LTE) và*

$$v_2(b!) \ge v_2(p!) = p - s_2(p) \ge p - \log_2(p+1)$$

(Legendre's). Suy ra $p - \log_2(p+1) \le 2\log_2(p-1) \Rightarrow p < 10$*, kiểm tra các trường hợp hữu hạn trên* $p = 2, 3, 5, 7$ *ta thu được* $p = 2 = a; b = 2$ *và* $p = 3 = a; b = 4$.

Vậy có hai bộ số nguyên dương (a, b, p) *thỏa mãn bài toán là* $(2, 2, 2)$ *và* $(3, 4, 3)$

Lời giải 4. *Trước tiên, ta có nhận xét sau:*

Nhận xét 1. a *không chia hết cho bất kì số nguyên số nào* $q < p$.

Chứng minh. *Giả sử ngược lại* $q \mid a$*, suy ra* $q \backslash a^p - p = b! \Rightarrow b < q$*. Do đó* $b! \le (q-1)! < q^{p-1} < q^p - p$*, vì vậy* $a < q$*, mâu thuẫn.*

Bây giờ, chúng ta xét hai trường hợp sau:

- ***Trường hợp 1:*** *Nếu* $p \not| a$.
  $p \not| a \Rightarrow p \not| b! \Rightarrow b < p$*, như vậy* $b! \le (p-1)! < p^{p-1} \le p^p - p$ *hoặc* $a < p$ *mâu thuẫn.*
- ***Trường hợp 2:*** *Nếu* $p \mid a$*. Do* $v_p\left(a^p - p\right) = 1 \Rightarrow p^2 \not| a^p - p \Rightarrow b < 2p$*, áp dụng bất đẳng thức* $\mathrm{AM} - \mathrm{GM}$ *ta được*

$$\begin{aligned} b! &\le (2p-1)! \\ &= (1 \cdot (2p-1))(2 \cdot (2p-2)) \cdots ((p-1) \cdot (p+1)) \cdot p \\ &< \left(p^2\right) \cdot \left(p^2\right) \cdots \left(p^2\right) \cdot p \\ &= p^{2p-1} \le \left(p^2\right)^p - p \end{aligned}$$

  Suy ra $a < p^2$*. Vậy từ đây ta được* $a = p$.
  Khi đó phương trình đã cho trở thành $a^p = b! + p \Leftrightarrow p^p - p = b\,!$.

  - *Nếu* $p = 2$ *dễ dàng ta tính được* $a = 2, b = 2$ *ta được bộ* $(a, b, c) = (2, 2, 2)$
  - *Nếu* p *lẻ, khi đó ta có* $v_2(b!) \ge \frac{b-1}{2} + \frac{b-3}{4} \ge \frac{3p-5}{4}$ *và*

$$v_2\left(p^p - p\right) = 2v_2(p-1) + v_2(p+1) - 1 \le \log_2(p+1) + \log_2(p-1) < 2\log_2 p$$

    Do đó chúng ta phải có $\frac{3p-5}{4} \le 2\log_2 p \Leftrightarrow p \ge 2^{\frac{3p-5}{8}}$*, bất đẳng thức này chỉ đúng với* $p \le 7$.

Tuy nhiên nếu $p = 7 \Rightarrow 5 \mid 7^7 - 7$ (vô lý) và $p = 5 \Rightarrow b! = 5^5 - 5 = 3120$ (vô lý).

$$p = 3 \Rightarrow b! = 3^3 - 3 = 24 \Rightarrow b = 4 \text{ ta được bộ } (a, b, c) = (3, 4, 3).$$

Vậy có hai bộ số nguyên dương (a, b, p) thỏa mãn bài toán là $(2, 2, 2)$ và $(3, 4, 3)$.

Lời giải 5. *Trước tiên, ta có hai nhận xét sau:*

Nhận xét 1. *Ta phải có $b \geq p$.*

Chứng minh. *Giả sử ngược lại $b < p$. Với mọi số nguyên tố $q \leq b$, chúng ta có $q \mid b\,!$ và $q \nmid p$ vì vậy $q \nmid a$ kể từ' $a > 1$.*
Điều này có nghĩa là $a \geq b + 1$ và $(b + 1)^p \leq b! + p$.
Với mỗi $p \geq 2$ chúng ta có $(b + 1)^p > b^p + pb^{p-1} \geq b^p + p \geq b\,! + p$ vô lý.

Nhận xét 2. *Ta phải có $a = p$.*

Chứng minh. *Do $b \geq p \Rightarrow p \mid b! + p$, điều này có nghĩa là $p^p \mid b! + p$ vì vậy $p \mid a$ và $b \leq 2p - 1$. Bây giờ ta lưu ý rằng không có số nguyên tố nào $q < p$ có thể $q \mid a$ vì số nguyên tố q đó đều chia hết $b!$, nhưng không chia hết p nên $a^p = b! + p$ không xảy ra.*
Nếu $a \neq p \Rightarrow a \geq p^2$, và $p^{2p} \leq (2p - 1)! + p$. Mặt khác

$$(2p-1)! = \prod_{t=1, t\neq p}^{2p-1} [t(2p-t)] \cdot p < \left(p^2\right)^{p-1} \cdot p = p^{2p-1} (\text{ bđt AM-GM})$$

Điều này có nghĩa là $p^{2p} - p^{2p-1} = p^{2p-1}(p - 1) < p$ (mâu thuẫn).
Vậy $a = p$.
Khi đó phương trình ban đầu trở thành $p^p = b! + p \Leftrightarrow p^{p-1}(p - 1) = b!$, cho một số $p \leq b \leq 2p - 1$

- *Nếu $p \geq 5$ thì theo định lý Zsigmondy tồn tại một số nguyên tố q mà $\text{ord}_q(p) = p - 1$, khi đó $q \mid b\,!$ và $q \geq 2p - 1$ (do $p - 1 \mid q$).*
  Vì vậy chúng ta phải có $b = 2p - 1$, nhưng khi đó $(2p - 1)! \geq (2p - 1)(2p - 2) \cdots p > p^p$ (mâu thuẫn).
  Vậy $p \leq 3$.

- *Nếu $p = 2$ dễ dàng ta tính được $a = 2, b = 2$ ta được bộ $(a, b, c) = (2, 2, 2)$.*

- *Nếu $p = 3 \Rightarrow b! = 3^3 - 3 = 24 \Rightarrow b = 4$ ta được bộ $(a, b, c) = (3, 4, 3)$.*
  Vậy có hai bộ số nguyên dương (a, b, p) thỏa mãn bài toán là $(2, 2, 2)$ và $(3, 4, 3)$.

2. Các bài tập đề nghị

Từ những cách giải trên các bạn vận dụng vào giải các bài toán tương tự sau đây nhé.

Bài toán 1 (BulgariaMO 96). *Tìm tất cả các số nguyên không âm x, y, z sao cho:*

$$5^x \cdot 7^y + 4 = 3^z.$$

Bài toán 2 (USAMO 1998). *Tìm tất cả các số nguyên không âm x, y, z sao cho:* $3^x - 2^y = 19^z$.

Bài toán 3 (VN TST 2019). *Tìm tất cả các số nguyên dương x, y, z sao cho:* $2^x + 1 = 7^y + 2^z$.

Bài toán 4 (EuroOM 2014). *Tìm tất cả các số nguyên dương x, y, z, t thỏa mãn:*

$$20^x + 14^{2y} = (x + 2y + z)^{zt}.$$

Bài toán 5 (Bilkent University Turkey -3/2022). *Tìm tất cả các số nguyên tố p, q thỏa mãn*

$$2^p = 2^{q-2} + q!$$

Và các bài toán trên liệu có bao nhiêu cách giải các bạn hãy tìm tòi và suy nghĩ cùng tôi.