Tạp Chí online của cộng đồng những người yêu toán

VỀ BÀI TOÁN CROATIA TST 2011
Nguyễn Song Minh

ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ ĐA THỨC
Lê Phúc Lữ & Trần Nguyễn Thanh Danh

GIỚI THIỆU ĐẶC TRƯNG EULER VÀ MỘT SỐ ỨNG DỤNG
Trần Thị Ánh Dương

VỀ TỶ SỐ VÀNG
Trần Quang Hùng

MỘT VÀI TÍNH CHẤT HÌNH HỌC TRÊN MỘT CẤU HÌNH

THÁNG 6/2023
NO.21

LỜI NGỎ

Kính chào độc giả Epsilon, chào mùa hè 2023!

Mùa hè là thời điểm tuyệt vời để nghỉ ngơi và tận hưởng cuộc sống. Đó là thời gian mà chúng ta có cơ hội khám phá và tìm hiểu những điều mới mẻ. Và đó cũng là thời khắc mà chúng tôi gửi đến Epsilon cho tất cả độc giả của mình.

Trong số báo Epsilon 23 này, chúng tôi tự hào mang đến cho bạn những câu chuyện đặc biệt, những bài toán thú vị và những ý tưởng độc đáo. Bạn sẽ được khám phá những chủ đề như đặc trưng Euler và ứng dụng, sự đối lập giữa lớp văn hóa Ấn và lớp văn hóa Hán, cách tiếp cận tổng thể trong việc dạy Ngôn Ngữ và Toán, ý nghĩa của bất đối xứng, những tính chất hình học trên cấu hình Tỷ số Vàng và nhiều chủ đề hấp dẫn khác.

Chúng tôi hy vọng rằng số báo Epsilon 23 sẽ mang đến cho bạn những trải nghiệm thú vị và kiến thức bổ ích trong mùa hè này. Xin chân thành cảm ơn sự ủng hộ và đồng hành của bạn!

Chúc bạn có một mùa hè tràn đầy niềm vui và ý nghĩa!

Trân trọng,

Ban Biên tập Epsilon

MỤC LỤC

Trần Thị Ánh Dương
Giới thiệu đặc trưng Euler và một số ứng dụng **5**

Nguyễn Lê Anh
Có hay không lớp văn hóa Ấn trước lớp văn hóa Hán? **27**

Nguyễn Ái Việt
Tiếp cận tổng thể tới dạy Ngôn Ngữ và Toán **31**

Trần Văn Trản
Sự cần thiết của bất đối xứng **35**

Trần Quang Hùng
Một vài tính chất hình học trên một cấu hình về Tỷ số Vàng **39**

Lê Phúc Lữ và Trần Nguyễn Thanh Danh
Đồ thị của hàm số đa thức **45**

Đào Xuân Luyện
Bài toán xây dựng đa thức **58**

Trần Nam Dũng
Câu chuyện về định lý Trung Hoa về số dư **72**

Nguyễn Song Minh
Về bài toán Croatia TST 2011 . . . . **83**

Nguyễn Song Thiên Long
Một số bổ đề về giới hạn của dãy số **90**

Tạ Duy Phượng và cộng sự
Giới thiệu trò chơi tháp Hà Nội **114**

Giới thiệu đặc trưng Euler và một số ứng dụng

Trần Thị Ánh Dương (Trường Phổ thông Trung học Lê Chân, Hải Phòng)

Giới thiệu. *Bài viết giới thiệu một số chứng minh công thức $F - V + E = 2$ (đặc trưng Euler) và một số ứng dụng của đặc trưng Euler.*

1. Mở đầu

Đặc trưng Euler, hay công thức $F - V + E = 2$ là một trong *17 phương trình làm thay đổi thế giới* (xem [1]). Do tính bản chất và quan trọng của công thức này, đặc trưng Euler có đến vài chục cách chứng minh (xem [7]) và có nhiều ứng dụng (xem, thí dụ, [6]).

Đặc trưng Euler (còn được gọi là *bất biến Euler*, *công thức Euler*, hoặc *đặc trưng Euler-Poincaré*) là một bất biến tôpô, là số không đổi đặc trưng cho hình dạng hoặc cấu trúc của một không gian tôpô không phụ thuộc vào cách nó bị biến dạng. Đặc trưng Euler thường được ký hiệu là $\mathcal{X}$. Đặc trưng Euler $\mathcal{X}(S)$ của một đa giác phẳng S được chia thành các tam giác bằng số đỉnh trừ đi số cạnh cộng với số mặt của tam giác trong đa giác đó:

$$\mathcal{X}(S) = V - E + F.$$

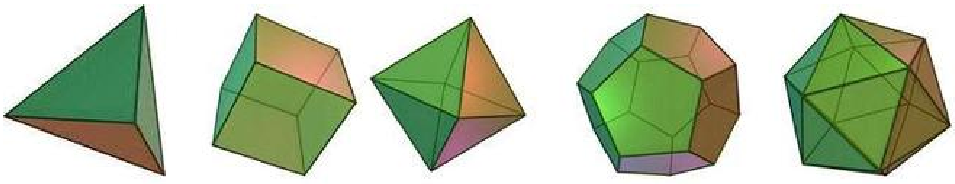
Đa diện lồi bất kì cũng có đặc trưng

$$\mathcal{X} = V - E + F = 2,$$

trong đó V, E và F tương ứng là số đỉnh (góc), các cạnh và mặt của khối đa diện.

Kết quả này cũng còn được gọi là *công thức đa diện Euler* hoặc *định lý đa diện Euler*. Đặc trưng Euler đã được xác định cho các khối đa diện và được sử dụng để chứng minh định lý về số các khối đa diện đều khác nhau (phân loại các khối Platon). Leonhard Euler, tên của ông được đặt cho khái niệm này, đã có các công trình nghiên cứu đầu tiên về đặc trưng này. Ta có:

Tên	Đỉnh V	Cạnh E	Mặt F	$\mathcal{X} = V - E + F$
Tứ diện	4	6	4	2
Hình lập phương	8	12	6	2
Bát diện	6	12	8	2
Thập nhị diện	20	30	12	2
Nhị thập diện	12	30	20	2



Hình 1. Các khối đa diện Platon.

Ta cũng có thể mở rộng đặc trưng Euler (tức công thức $\mathcal{X} = 2$) cho hình cầu và áp dụng cho các khối đa diện cầu.

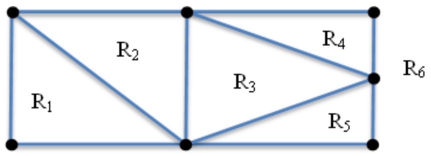
Bài viết này giới hạn trong phạm vi giới thiệu một số cách chứng minh cơ bản và một số ứng dụng tiêu biểu của đặc trưng Euler.

2. Một số chứng minh công thức đặc trưng Euler

Mục này trình bày một số cách chứng minh công thức đặc trưng Euler.

2.1. Chứng minh dựa trên lý thuyết đồ thị

Biểu diễn phẳng của một đồ thị chia mặt phẳng thành các miền, kể cả miền vô hạn. Ví dụ biểu diễn phẳng của đồ thị trên Hình 2 chia mặt phẳng thành 6 miền. Chúng được gán nhãn như hình vẽ.



Euler đã tìm ra mối quan hệ giữa số miền, số đỉnh và số cạnh của một đồ thị phẳng. Ta có:

Định lý 1 *Nếu G là một đồ thị phẳng liên thông có V đỉnh, E cạnh và F miền thì*

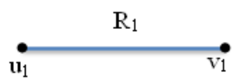
$$V - E + F = 2.$$

2.1.1 Chứng minh 1

Trước tiên ta xác định biểu diễn phẳng của G. Ta sẽ chứng minh định lí bằng cách xây dựng một dãy các đồ thị con $G_1, G_2, ..., G_e = G$, mỗi bước ghép thêm một cạnh vào đồ thị ở bước trước. Điều này làm được khi sử dụng phương pháp quy nạp toán học.

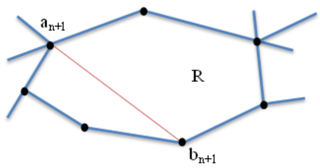
Xem thêm chứng minh này ở [2], trang 584.

Lấy tùy ý một cạnh của G để nhận được G_1. Để nhận được G_n từ G_{n-1} ta thêm tùy ý một cạnh liên thuộc với một đỉnh của G_{n-1} và thêm một đỉnh khác liên thuộc với cạnh mới đó, nếu nó chưa có trong G_{n-1}. Điều này làm được vì G liên thông. G sẽ nhận được sau khi e cạnh được ghép thêm vào các đồ thị tạo ra trước. Gọi R_n, E_n và V_n tương ứng là số miền, số cạnh và số đỉnh của biểu diễn phẳng của G_n do biểu diễn phẳng của G sinh ra. Hệ thức $R_1 = E_1 - V_1 + 2$ là đúng với G_1 vì $E_1 = 1, V_1 = 2$ và $R_1 = 1$.

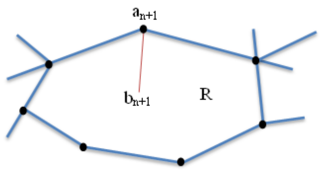


Bây giờ giả sử theo quy nạp rằng $R_n = E_n - V_n + 2$. Gọi $\{a_{n+1}, b_{n+1}\}$ là cạnh gộp vào G_n để được G_{n+1}. Có hai khả năng xảy ra.

Trường hợp 1. Cả hai đỉnh a_{n+1}, b_{n+1} đã thuộc G_n. Khi đó chúng phải ở trên biên của miền chung R nếu không thì không thể gộp cạnh $\{a_{n+1}, b_{n+1}\}$ vào G_n mà không có các cạnh cắt nhau (G_{n+1} là phẳng). Cạnh mới này sẽ chia miền R thành hai miền con. Do đó $R_{n+1} = R_n + 1, E_{n+1} = E_n + 1$ và $V_{n+1} = V_n$. Do vậy ta có công thức $R_{n+1} = E_{n+1} - V_{n+1} + 2$.



Trường hợp 2. Một trong hai đỉnh của cạnh mới chưa thuộc G_n. Giả sử a_{n+1} thuộc G_n còn b_{n+1} không thuộc G_n. Thêm cạnh này không sinh ra một miền mới nào, vì b_{n+1} phải ở trong miền có a_{n+1} ở trên biên của nó. Do đó, $R_{n+1} = R_n$. Nhưng $E_{n+1} = E_n + 1$ và $V_{n+1} = V_n + 1$. Mỗi vế của công thức không đổi nên công thức vẫn đúng. Nói cách khác $R_{n+1} = E_{n+1} - V_{n+1} + 2$.



Vậy với mọi n ta đều có $R_n = E_n - V_n + 2$. Vì đồ thị gốc là G_e nhận được sau khi thêm e cạnh. Định lí được chứng minh. □

Công thức Euler được minh họa trong ví dụ sau:

Ví dụ Giả sử đơn đồ thị phẳng liên thông có 20 đỉnh, mỗi đỉnh đều có bậc bằng 3. Biểu diễn phẳng của đồ thị này chia mặt phẳng thành bao nhiêu miền?

LỜI GIẢI Đồ thị phẳng này có 20 đỉnh, mỗi đỉnh đều có bậc bằng 3, do vậy $V = 20$. Vì tổng số bậc của các đỉnh, $3V = 3.20 = 60$, bằng hai lần số cạnh, tức là $2E$, ta có $E = 60 : 2 = 30$. Do vậy theo công thức Euler, số các miền là:

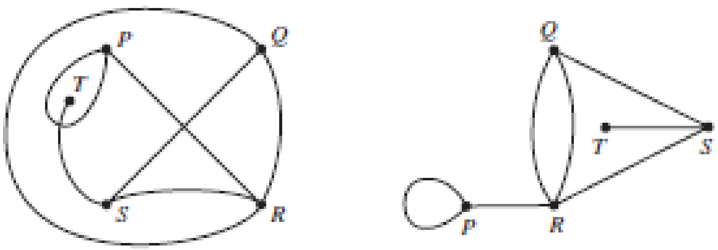
$$R = E - V + 2 = 30 - 20 + 2 = 12.$$

□

2.1.2 Chứng minh 2

Đồ thị trong Hình 2 có năm đỉnh, bảy cạnh, bốn miền và $5 - 7 + 4 = 2$.

Xem thêm chứng minh này ở [4], trang 120.



Hình 2. Ví dụ một đồ thị có năm đỉnh, bảy cạnh và bốn miền.

Nếu không tính vùng không giới hạn là miền thì công thức Euler trở thành $V - E + F = 1$.

Xét một cây (một đồ thị phẳng liên thông và không có chu trình). Vì cây không có chu trình, miền duy nhất là miền không bị giới hạn, nên công thức Euler $V - E + 1 = 2$ hay $V = E + 1$. Do đó, số đỉnh của cây lớn hơn số cạnh 1 đơn vị.

Ta dùng cách loại bỏ các cạnh ra khỏi đồ thị để chứng minh định lí.

Xét một đồ thị phẳng liên thông. Chọn một cạnh bất kì. Cạnh có thể liên thuộc hai đỉnh hoặc là một khuyên.

Hình 3. Loại bỏ cạnh a, c, d.

Giả sử cạnh liên thuộc hai đỉnh. Ta thu nhỏ cạnh cho đến khi nó biến mất hoàn toàn và trở thành một đỉnh. Điều này có thể thực hiện trong đồ thị phẳng. (xem loại bỏ cạnh a, c, d trong Hình 3). Như vậy sẽ làm cho số cạnh và số đỉnh giảm đi 1 đơn vị. Số miền không đổi. Do đó, giá trị của biểu thức $V - E + F$ không thay đổi.

Giả sử cạnh là một khuyên. Ta loại bỏ các cạnh b, e. Do đó, số cạnh và số miền giảm đi 1 đơn vị. Số đỉnh không thay đổi. Vì vậy, giá trị của biểu thức $V - E + F$ không thay đổi.

Tiếp tục quá trình loại bỏ cạnh cho đến khi còn lại một đỉnh duy nhất, không có cạnh và có một miền (miền ngoài). Do đó, $V - E + F = 2$.

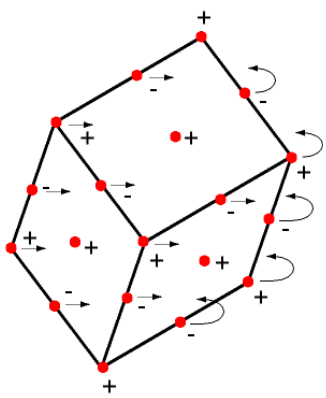
Bởi vì $V - E + F$ không đổi trong suốt quá trình nên $V - E + F = 2$ đúng với đồ thị ban đầu. $\square$

2.2. Phương pháp điện tích

2.2.1 Điện tích (Electrical Charge)

Xem thêm chứng minh này ở [7]

Đặt khối đa diện trong không gian sao cho không có cạnh nằm ngang. Khi đó, chỉ có duy nhất một đỉnh cao nhất U và một đỉnh thấp nhất L.



Đặt một điện tích dương tại mỗi đỉnh, một điện âm tại chính giữa mỗi cạnh và một điện tích dương ở giữa mỗi mặt.

Ta cần chỉ ra rằng, mọi điện tích đều bị khử, trừ hai điện tích tại U và L. Bỏ mọi điện tích ở đỉnh và cạnh vào mặt kế bên, sau đó nhóm hết điện tích trong mỗi mặt lại với nhau. Hướng di chuyển được xác định theo quy luật: mỗi điện tích di chuyển theo phương ngang, ngược chiều kim đồng hồ. Như vậy, mỗi mặt nhận một tổng điện tích từ khoảng không gian dọc theo giới hạn của nó. Không gian mở này luân phiên tách thành cạnh và đỉnh. Vì điện tích đầu tiên và cuối cùng là ở cạnh, sẽ có dư một điện tích âm. Cho nên tổng điện tích trong mỗi mặt đều bằng 0. Và tất cả chỉ còn lại $+2$ cho đỉnh U và L.

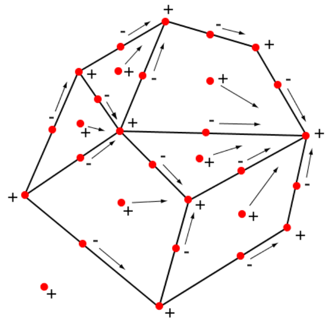
2.2.2 Điện tích đối ngẫu (Dual Electrical Charge)

Xem thêm chứng minh này ở [7]

Xoay khối đa diện sao cho không có cạnh nào nằm dọc.

Giống như phương pháp trước, đặt một điện tích dương ở mỗi đỉnh và giữa các mặt; điện tích âm ở chính giữa các cạnh.

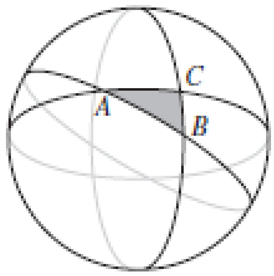
Ta cần chỉ ra rằng, tất cả mọi điện tích đều bị khử, trừ hai điện tích dương. Di chuyển điện tích trên mỗi cạnh đến điểm tận cùng bên phải của nó; di chuyển điện tích trên mỗi mặt (ngoại trừ mặt ngoài cùng) đến đỉnh gần nhất bên phải của nó. Mọi đỉnh (ngoại trừ đỉnh ngoài cùng bên trái) lần lượt nhận điện tích của các cạnh và mặt; triệt tiêu với điện tích ban đầu của nó. Chỉ còn lại duy nhất 2 điện tích dương ở mặt ngoài cùng và đỉnh ngoài cùng bên trái là chưa triệt tiêu.



2.3. Phương pháp sử dụng góc hình cầu (Spherical angles)

Phương pháp này sử dụng tổng các góc trong tam giác cầu trên mặt cầu. Chìa khóa để chứng minh của Legendre là một công thức từ hình học hình cầu cho diện tích tam giác trên bề mặt của quả cầu theo góc bên trong. Trên hình cầu, hình tam giác và các hình đa giác không được tạo thành từ các đoạn thẳng mà từ vòng cung của đường tròn lớn. Một đường tròn lớn là bất kì đường tròn nào trên quả cầu có bán kính tương đương với bán kính quả cầu.

Xem thêm chứng minh này ở [4], trang 89.



Chúng ta xác định một tam giác trên hình cầu được tạo thành bởi ba đường tròn lớn, được gọi là *tam giác trắc địa* (geodesic triangle).

Nhiều định lí đối với tam giác phẳng cũng đúng đối với tam giác trắc địa, chẳng hạn: tổng hai cạnh của tam giác luôn lớn hơn cạnh còn lại. Nhưng có một tính chất không đúng. Đó là, trong hình học phẳng tổng các góc trong tam giác bằng 180^0 nhưng trên mặt cầu, tổng các góc trong tam giác trắc địa luôn lớn hơn 180^0.

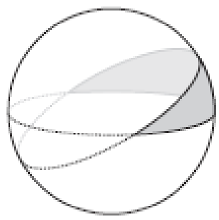
Vào thế kỉ 17, Thomas Harriot (1560-1621) và Albert Girard (1595-1632) đã chứng minh định lí sau.

Định lý 2 (Định lí Harriot-Girard đối với tam giác) *Tam giác trắc địa trên mặt cầu đơn vị với ba góc trong a, b, c có diện tích*

$$S = a + b + c - \pi.$$

Bởi vì tổng các góc trong tam giác phẳng là π nên có thể viết lại công thức trên như sau: $S = (a + b + c)$ - tổng các góc trong tam giác phẳng.

LỜI GIẢI Giả sử hình cầu đơn vị có bán kính $R = 1$. Khi đó diện tích của nó là $S_{mc} = 4\pi$. Ta sử dụng một vật được gọi là *lune* (lưỡi liềm). Lune là miền được giới hạn bởi hai đường tròn lớn. Hai đường tròn lớn luôn cắt nhau tại hai điểm đối xứng trên mặt cầu.

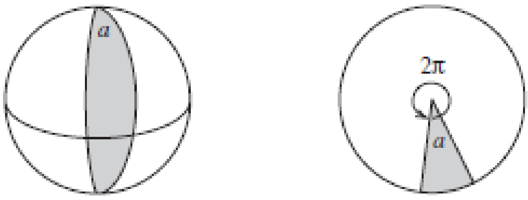


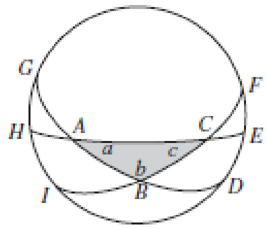
Nếu lưỡi liềm có một góc a thì góc đối diện cũng bằng a. Ta có:

$$\frac{S_{lune}}{S_{mc}} = \frac{a}{2\pi}.$$

Khi đó diện tích lưỡi liềm là

$$S_{lune} = \frac{a}{2\pi} S_{mc} = \frac{a}{2\pi} 4\pi = 2a.$$





Hình 4. Tam giác trên bán cầu.

Xét một tam giác trắc địa ABC trên mặt cầu đơn vị, có các góc a, b, c. Tam giác nằm ở một nửa bán cầu. Mở rộng các cạnh của tam giác ABC cắt biên của bán cầu. Gọi D, E, F, G, H, I là các giao điểm.
Theo tính chất đối xứng,

$$S_{\mathrm{ADE}} + S_{AGH} = S_{lune} = 2\mathrm{a}.$$

Tương tự,

$$S_{BFG} + S_{\mathrm{BDI}} = 2b; S_{CHI} + S_{CEF} = 2c.$$

Suy ra

$$(S_{\mathrm{ADE}} + S_{AGH}) + (S_{BFG} + S_{\mathrm{BD}I}) + (S_{CHI} + S_{CEF}) = 2\mathrm{a} + 2b + 2c.$$

Do đó:

$$\frac{1}{2} S_{mc} + 2S_{ABC} = 2\mathrm{a} + 2b + 2c$$
$$\Rightarrow 2\pi + 2S_{ABC} = 2\mathrm{a} + 2b + 2c$$
$$\Rightarrow S_{ABC} = \mathrm{a} + b + c - \pi$$

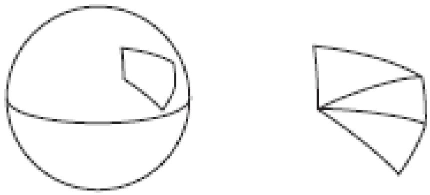
□

Định lý 3 (Định lí Harriot-Girard đối với đa giác) *Diện tích của đa giác trắc địa(geodesic polygon) n - cạnh trên mặt cầu đơn vị có các góc trong $a_1, a_2, ..., a_n$ là*

$$S = a_1 + a_2 + ... + a_n - n\pi + 2\pi.$$

Lời giải Tổng các góc trong của đa giác phẳng n-cạnh là $(n-2)\,\pi$.
Do đó, tương tự đối với tam giác, diện tích của đa giác trắc địa là hiệu của tổng các góc trong của nó với tổng các góc trong của đa giác phẳng có cùng số cạnh.
Ta chia đa giác trắc địa thành các tam giác trắc địa bằng cách thêm các đường chéo, ta được $(n-2)$ tam giác. Tổng diện tích các tam giác bằng diện

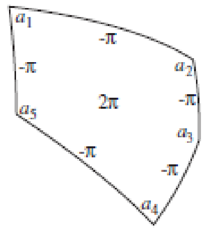
tích đa giác và tổng các góc của các tam giác bằng tổng các góc của đa giác.



Hình 5. Một đa giác trên mặt cầu được phân chia thành các tam giác.

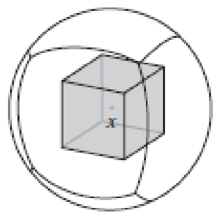
Áp dụng định lí Harriot - Girard đối với $(n-2)$ tam giác và tổng hợp ta được

$$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n - (n-2)\,\pi = a_1 + a_2 + \ldots + a_n - n\pi + 2\pi.$$



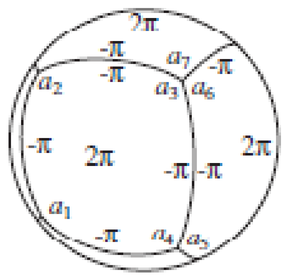
Hình 6. Đa giác cầu.

Hình dung đa giác như Hình 6. Đặt thước đo góc tại mỗi góc, thêm $-\pi$ trên mỗi cạnh và thêm 2π giữa mỗi mặt. Diện tích đa giác bằng tổng các số trên hình. Biểu diễn hình ảnh này rất hữu ích trong việc hiểu chứng minh của Legendre về công thức Euler.
Với một đa diện lồi có V đỉnh, E cạnh và F mặt. Gọi x là điểm bất kì bên trong. Như Hình 7, xây dựng một hình cầu tâm x bao quanh đa diện. Ta có thể chọn hình cầu có bán kính bằng 1.



Hình 7. Phép chiếu một hình đa diện lên một mặt cầu.

Sử dụng các tia phát ra từ x, ta chiếu đa diện trên mặt cầu. Tưởng tượng rằng đa diện là một mô hình khung dây và x là một bóng đèn. Hình chiếu là bóng của khung dây trên bề mặt của mặt cầu. Khi đó các mặt của đa diện trở thành các đa giác trắc địa.
Ta tính diện tích mặt cầu bằng hai cách. Trước hết, ta sử dụng công thức tính diện tích nổi tiếng để tìm ra diện tích mặt cầu đơn vị là: $S = 4\pi$. Sau đó tính tổng diện tích các mặt đa giác trên mặt cầu.
Theo định lí Harriot - Girard, diện tích của mỗi mặt n - biên bằng tổng các góc trong trừ đi $n\pi - 2\pi$. Gán tất cả các góc, cạnh và mặt trên mặt cầu, đặt các thước đo ở mỗi góc, thêm $-\pi$ trên cả hai biên của mỗi cạnh và thêm 2π ở giữa mỗi mặt, tạo ra một mặt cầu như Hình 8.



Hình 8. Đa diện cầu.

Mặc dù, tổng các góc tại mỗi đỉnh của đa diện nhỏ hơn 2π nhưng khi chiếu trên mặt cầu thì tổng các góc bằng 2π. Vì có V đỉnh nên ta có tổng các góc bằng $2\pi V$. Mỗi cạnh thêm -2π mà có E cạnh nên tổng ta có $-2\pi E$. Mỗi mặt thêm 2π mà có F mặt nên tổng ta có $2\pi F$.
Vậy ta có:

$$4\pi = 2\pi V - 2\pi E + 2\pi F f \Rightarrow 2 = V - E + F.$$

□

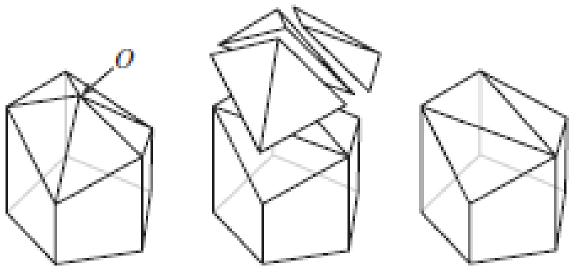
2.4. Chứng minh của Euler

Euler đã đề xuất chứng minh công thức $\mathcal{X} = 2$ bằng cách loại bỏ các đỉnh của khối đa diện lồi, mỗi lần loại bỏ một đỉnh cho đến khi chỉ còn lại một hình

Xem thêm chứng minh này ở [4], trang 68.

chóp tam giác gồm bốn đỉnh.

Ta bắt đầu với một khối đa diện lồi có V đỉnh, E cạnh và F mặt. Đầu tiên ta loại bỏ một đỉnh từ khối đa diện sao cho khối đa diện còn lại có ít hơn một đỉnh. Cần xác định số mặt và số cạnh. Gọi O là đỉnh sẽ được loại bỏ và giả sử có n mặt (do đó có n cạnh) có chung đỉnh O. Ta thấy đỉnh O có thể được loại bỏ bằng cách cắt đi $n-2$ khối chóp có đỉnh O. Ví dụ, khối đa diện ở Hình 9 có đỉnh O là giao của 5 mặt. Do đó nó được loại bỏ bằng cách cắt đi 3 khối chóp.



Hình 9. Loại bỏ đỉnh O bằng cách cắt đi các khối chóp.

Ta phải xét ba trường hợp đặc biệt.

Trường hợp 1 Giả sử n mặt có chung đỉnh O đều là hình tam giác. Bằng cách cắt bỏ O, ta đồng thời loại bỏ n mặt này, hệ quả là tạo ra $n-2$ mặt tam giác mới. Giả sử các mặt này không đồng phẳng, ta có số mặt của khối đa diện mới là

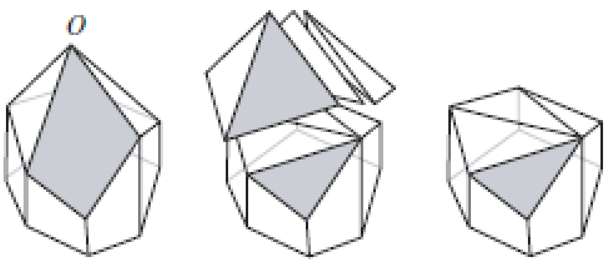
$$F - n + (n-2) = F - 2.$$

(F là số mặt ban đầu)

Trong quá trình ta cũng loại bỏ n cạnh giao nhau tại O, nhưng ta thêm $n-3$ cạnh nằm giữa $n-2$ mặt tam giác mới. Do đó số cạnh của khối đa diện mới là (E là số cạnh ban đầu)

$$E - n + (n+3) = E - 3.$$

Ví dụ trong Hình 9, ban đầu khối đa diện có 11 mặt và 20 cạnh. Sau khi loại bỏ đỉnh O ta được khối đa diện mới có 9 mặt và 17 cạnh.



Hình 10.

Trường hợp 2 Giả sử một trong số các mặt giao nhau tại O không phải là hình tam giác (ví dụ mặt tô đen trong Hình 10). Khi khối chóp tam giác chia mặt đó bị loại bỏ thì mặt đó không hoàn toàn bị biến mất. Hơn nữa một cạnh mới sẽ được thêm vào khi mặt đó bị cắt làm hai. Do đó số cạnh và số mặt của khối đa diện mới đều lớn hơn 1 so với ban đầu. Ví dụ trong Hình 10, khối đa diện ban đầu có 12 mặt và 23 cạnh. Sau khi loại bỏ đỉnh O ta được khối đa diện mới có $12 - 2 + 1 = 11$ mặt và $23 - 3 + 1 = 21$ cạnh.

Tổng quát lại, nếu khối đa diện ban đầu có s mặt không là hình tam giác có chung đỉnh O thì sau khi loại bỏ đỉnh O, số mặt và số cạnh sẽ nhiều hơn s đơn vị so với ban đầu. Vì vậy số mặt mới là

$$F - 2 + s.$$

Và số cạnh mới là

$$E - 3 + s.$$

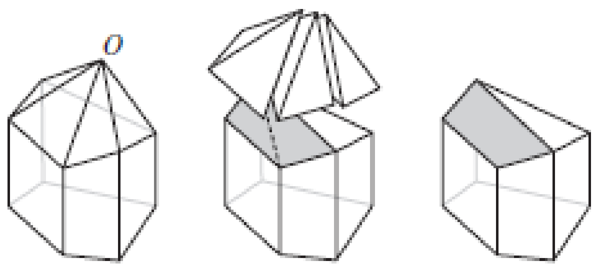
Trường hợp 3 Giả sử hai mặt tam giác mới nằm cạnh nhau và đồng phẳng (ví dụ mặt được tô đen trong Hình 11). Chúng sẽ không tạo ra hai mặt phân biệt trong khối đa diện mới, mà tạo ra một mặt hình tứ giác. Vì vậy sẽ có ít hơn 1 mặt so với ban đầu. Và do không có cạnh giao giữa hai mặt nên cũng sẽ có ít hơn 1 cạnh so với ban đầu. Ví dụ trong Hình 11, khối đa diện có 11 mặt và 20 cạnh. Sau khi loại bỏ đỉnh O, khối đa diện còn lại $11 - 2 - 1 = 8$ mặt và $20 - 3 - 1 = 16$ cạnh.

Vậy nếu thực hiện t lần thì sẽ có ít hơn t mặt và t cạnh. Vậy khối đa diện còn lại có số mặt là

$$F - 2 + s - t.$$

Và số cạnh là

$$E - 3 + s - t.$$



Hình 11.

Các công thức này đại diện cho số mặt và số cạnh của khối đa diện sau khi một đỉnh được loại bỏ. Nếu ta lấy số cạnh mới trừ đi số mặt mới ta được

$$(E - 3 + s - t) - (F - 2 + s - t) = 1.$$

Có thể nói, hiệu của cạnh và mặt giảm đi 1 đơn vị sau khi loại bỏ 1 đỉnh. Do đó nếu loại bỏ n đỉnh thì hiệu của cạnh và mặt là

$$E - F - n.$$

Ta có thể kết luận được chứng minh của Euler. Ban đầu ta có một khối đa diện lồi với V đỉnh, E cạnh và F mặt. Giả sử ta lần lượt loại bỏ từng đỉnh một, thì sau n lần sẽ còn lại 4 đỉnh. Khi đó $V - n = 4$ hay $n = V - 4$. Khối đa diện còn lại có 4 đỉnh được gọi là khối chóp tam giác, có hiệu của cạnh và mặt là $6 - 4 = 2$ mà theo lập luận ở trên là $E - F - n$. Do đó ta có công thức

$$E - F - n = 2. \tag{2.4.1}$$

Và

$$n = V - 4. \tag{2.4.2}$$

Thay (2.4.2) vào (2.4.1) và chuyển vế ta được

$$V - E + F = 2.$$

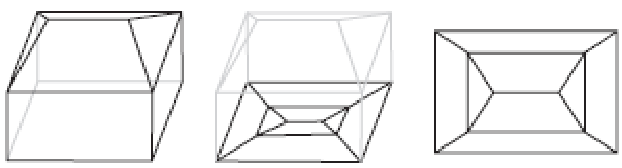
□

2.5. Phương pháp loại bỏ tam giác

Cauchy đã đưa ra ý tưởng thêm vào hoặc loại bỏ một số đỉnh của hình đa diện sao cho giá trị biểu thức $V - E + F$ không đổi. Cuối cùng ta được một tam giác đơn có $V - E + F = 2$.

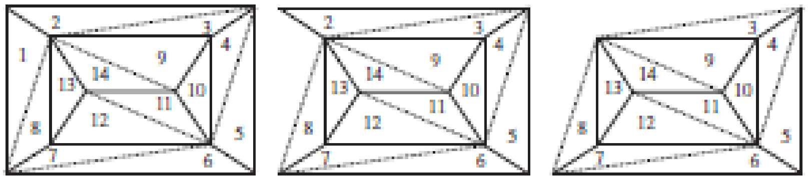
Xem thêm chứng minh này ở [4], trang 114.

Cho một hình đa diện lồi có V đỉnh, E cạnh và F mặt. Đầu tiên ta sẽ biến đổi hình đa diện thành một đồ thị phẳng (Hình 12). Ta loại bỏ một mặt của hình đa diện, rồi di chuyển vào mặt này tất cả các đỉnh khác mà không làm thay đổi số lượng của chúng, ta sẽ có một hình phẳng của đa giác chứa trong một đường viền.



Hình 12. Chiếu hình đa diện lên mặt đáy.

Xét đồ thị phẳng lồi tạo ra từ các cạnh của đa diện. Chia đồ thị thành các hình tam giác bằng cách thêm đường chéo vào tất cả các miền không phải là hình tam giác (đồ thị thứ nhất Hình 13). Mỗi lần một đường chéo được thêm vào thì số cạnh và số miền đều tăng thêm 1 đơn vị. Số đỉnh vẫn giữ nguyên. Như vậy, biểu thức $V - E + F$ không đổi so với đồ thị ban đầu.



Hình 13. Thứ tự tam giác loại bỏ từ đồ thị tam giác.

Sau khi đồ thị đã được tam giác hóa, ta phân rã nó bằng cách loại bỏ các hình tam giác từ bên ngoài, cho đến khi chỉ còn lại một tam giác duy nhất.

Một hình tam giác ở bên ngoài đồ thị có thể có một hoặc hai cạnh bên ngoài. Trong trường hợp một, tam giác được loại bỏ bằng cách bỏ đi một cạnh và một miền (đồ thị thứ hai Hình 13). Trong trường hợp hai, tam giác được loại bỏ bằng cách bỏ đi hai cạnh, một đỉnh và một miền (đồ thị thứ ba Hình 13). Trong cả hai trường hợp thì biểu thức $V - E + F$ không đổi.

Đến cuối cùng, ta được một đồ thị tạo bởi một tam giác đơn, có 3 đỉnh, 3 cạnh và 2 miền. Khi đó $V - E + F = 3 - 3 + 2 = 2$.

Vậy $V - E + F = 2$ luôn đúng đối với đồ thị ban đầu. □

3. Một số ứng dụng và bài toán liên quan

Công thức đặc trưng Euler được sử dụng làm chìa khóa để chứng minh một số định lí và bài toán liên quan. Ta xét một số ví dụ sau.

3.1. Khối đa diện Platon

Trong toán học, các khối đa diện Platon là các đa diện lồi đều. Chỉ có đúng 5 đa diện Platon đó là tứ diện đều (tetrahedron), hình lập phương (hexahedron), bát diện đều (octahedron), thập nhị diện đều (dodecahedron) và nhị thập diện đều (icosahedron).

Các đa diện đều Platon được biết đến từ rất sớm trong thời kì cổ đại. Những đa diện đều Platon đầu tiên được tạo ra từ cách đây hơn 4000 năm và chúng được chạm khắc trên những khối đá. Xuất hiện từ rất sớm nhưng cho tới thời điểm cách đây hơn 2500 năm thì các quy luật toán học xung quanh vấn đề các khối đa diện đều Platon mới lần đầu tiên được đề cập tới và được nghiên cứu sâu rộng. Và cho tới khi nhà triết học, nhà thiên văn học và cũng là nhà hình học nổi tiếng Hy Lạp - Platon (khoảng 427-347 TCN) chỉ ra rằng chỉ có 5 khối đa diện đều thì chúng được biết gọi là các khối Platon. Các khối Platon gồm 5 đa diện đều tetrahedron, hexahedron, octahedron, dodecahedron và icosahedron (Hình 1).

Dưới đây trình bày chứng minh tồn tại duy nhất 5 đa diện đều Platon nhờ đặc trưng Euler.

Định nghĩa 1 Khối đa diện (H) được gọi là *khối đa diện lồi* nếu đoạn thẳng nối hai điểm bất kì của (H) luôn thuộc (H).

Khối đa diện lồi đều là khối đa diện lồi có tính chất sau:

a) Mỗi mặt của nó là một đa giác đều p cạnh.

b) Mỗi đỉnh của nó là đỉnh chung của đúng q mặt.

Khối đa diện đều như vậy được gọi là khối đa diện đều loại (p, q).

Lời giải (Chỉ tồn tại duy nhất 5 đa diện đều Platon) Ta có đặc trưng Euler:

$$V - E + F = 2. \tag{3.1.1}$$

Đầu tiên ta có mối liên hệ: $pF = 2E = qV$. Thật vậy, ta có p là số cạnh của mỗi mặt đa diện, F số mặt của khối đa diện, suy ra pF là tổng số cạnh của tất cả các mặt của khối đa diện. Mà một cạnh của đa diện kề với hai mặt của khối đa diện. Suy ra $pF = 2E$.
Mặt khác ta lại có q là số mặt gặp nhau ở một đỉnh, V là tổng số đỉnh của khối đa diện. Suy ra qVv là tổng số đỉnh của tất cả các mặt của khối đa diện. Mặt khác, q là số cạnh gặp nhau ở một đỉnh. Mà mỗi cạnh liên kết với hai đỉnh của đa diện. Suy ra $qV = 2E$. Vậy:

$$pF = 2E = qV. \tag{3.1.2}$$

Thế (3.1.2) vào (3.1.1) ta được:

$$\frac{2E}{q} - E + \frac{2E}{p} = 2.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{q} + \frac{1}{p} - \frac{1}{2} = \frac{1}{E}.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{q} + \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{E}. \tag{3.1.3}$$

Bởi vì mỗi đa diện có ít nhất ba cạnh, khối đa diện có ít nhất ba mặt gặp nhau ở một đỉnh nên ta có $p \geq 3, q \geq 3$. Mặt khác nếu p, q cùng lớn hơn 3 thì sẽ dẫn đến $p \geq 4, q \geq 4$. Do đó

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{E} \leq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{E} \le 0. \qquad (3.1.4)$$

Từ (3.1.4) suy ra điều vô lý. Do đó p, q không thể đồng thời lớn hơn 3 được.
Suy ra $p = 3$ và $q \ge 3$ hoặc $p \ge 3$, và $q = 3$.
Không mất tính tổng quát, giả sử $p = 3$. Thế vào (3.1.4) ta được:

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{E}.$$
$$\Rightarrow \frac{1}{q} = \frac{1}{6} + \frac{1}{E} > \frac{1}{6}.$$
$$\Rightarrow 3 \le q < 6.$$

Do q là số nguyên nên q chỉ có thể là 3, 4, 5. Từ đó suy ra $e = 6, 12, 30$. Một cách tương tự cho trường hợp $q = 3$. Ta cũng có $p = 3, 4, 5$.
Vậy ta nhận được năm cặp số (3,3), (3,4), (3,5), (4,3), (5,3). Từ năm cặp số giá trị của (p, q) này cho ta năm đa giác đều cần chứng minh. □

3.2. Trái bóng đá và bài toán phủ mặt cầu

Trái bóng thường được phủ bởi các miếng da đen trắng, không biết có bao nhiêu người đã tò mò mà cầm lên đếm xem có bao nhiêu miếng da đen, bao nhiêu miếng da trắng. Cụ thể, mỗi mảnh ngũ giác đen gắn với 5 mảnh lục giác trắng khác. Mỗi mảnh lục giác gắn với 3 mảnh lục giác và 3 mảnh ngũ giác khác. Và thực tế, ta có thể chứng minh rằng chỉ có đúng một cách phủ kín bề mặt quả bóng theo kiểu như vậy, đó là phủ bởi 12 miếng da đen hình ngũ giác đều và 20 miếng da trắng hình lục giác đều.

Để đơn giản, ta có thể coi quả bóng là một khối đa diện. Một đa diện lồi rất giống với trái bóng và nó sẽ biến thành trái bóng khi ta thực hiện một phép chiếu đa diện lồi trên lên một mặt cầu có tâm là tâm của đa diện đang xét. Một cách tưởng tượng, ta làm cong các mặt của đa diện từ các đa giác phẳng thành các đa giác cầu.

Đa diện lồi được giới hạn bởi các mặt là các đa giác phẳng, các đa giác này được giới hạn bởi các đoạn thẳng, còn các đoạn thẳng được giới hạn bởi 2 đầu mút, chúng là các đỉnh của đa diện lồi.

Gọi n là số mặt ngũ giác. Vì mỗi hình ngũ giác kề với 5 hình lục giác khác nên có $5n$ mặt lục giác. Con số này thực tế phải chia cho 3, vì mỗi mặt lục giác lại cùng lúc kề với 3 mặt ngũ giác. Khi đó số hình lục giác là $\frac{5n}{3}$.

Mỗi đỉnh được tính ba lần (ứng với ba mặt), mỗi cạnh được tính hai lần (ứng với hai mặt) nên ta có:

Số đỉnh:
$$V = \frac{5n + 6.\frac{5n}{3}}{3} = 5n;$$

Số cạnh:

$$E = \frac{5n + 6.\frac{5n}{3}}{2} = \frac{15n}{2};$$

Số mặt:

$$F = n + \frac{5n}{3} = \frac{8n}{3}.$$

Thay vào $V - E + F = 2$ ta được:

$$\frac{n}{6} = 2 \Rightarrow n = 12.$$

Như vậy cần phủ kín bề mặt quả bóng bằng đúng 12 mảnh ngũ giác và 20 mảnh lục giác.

4. Đặc trưng Euler và một số bài toán trong lý thuyết đồ thị

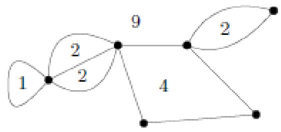
Đặc trưng Euler có thể dùng để lập một số bất đẳng thức đối với các đồ thị phẳng và phát triển các định lí về lý thuyết đồ thị.

4.1. Bất đẳng thức đối với đồ thị phẳng

Hệ quả 1 Nếu G là một đơn đồ thị phẳng liên thông có E cạnh, V đỉnh, với $V \geq 3$. Khi đó $E \leq 3V - 6$.

Xem thêm ở [2], trang 586.

Định nghĩa 2 **Bậc của miền**. Đó là số cạnh trên biên của miền đó. Khi một cạnh xuất hiện hai lần trên biên (tức là nó được vẽ hai lần khi vẽ biên) nó sẽ góp 2 đơn vị vào bậc của miền.



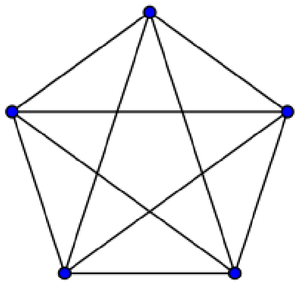
Bổ đề 1 Tổng số bậc của các miền bằng đúng hai lần số cạnh của đồ thị

Lời giải (Chứng minh Bổ đề 1) Trong đồ thị, mỗi cạnh là cạnh chung của hai miền. Do đó, tổng số bậc của miền bằng hai lần số cạnh của đồ thị. □

Lời giải (Chứng minh Hệ quả 1) Một đơn đồ thị phẳng liên thông khi vẽ trên một mặt phẳng sẽ chia mặt phẳng thành r miền. Bậc của mỗi miền ít nhất bằng 3 (vì ta chỉ xét đồ thị đơn nên không có cạnh bội để tạo ra miền bậc 2 và không có khuyên để tạo ra miền bậc 1). Đặc biệt, bậc của miền vô hạn ít nhất bằng 3 vì có ít nhất ba đỉnh trong đồ thị.

Theo Bổ đề 1 ta có $2E = \sum_R \deg(R)$.
Vì mỗi miền có bậc lớn hơn hoặc bằng 3 nên $\sum_R \deg(R) \geq 3r$. Suy ra $\frac{2E}{3} \geq r$.
Theo đặc trưng Euler ta có $r = E - V + 2$. Do đó $E - V + 2 \leq \frac{2E}{3} \Rightarrow E \leq 3V - 6$. □

Ví dụ Chứng minh rằng đồ thị đầy đủ gồm 5 đỉnh K_5 không là đồ thị phẳng.

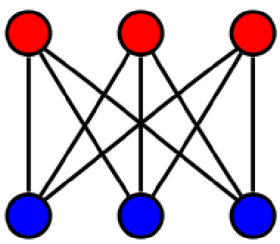


Lời giải Đồ thị K_5 có năm đỉnh và mười cạnh. Vì bất đẳng thức $E \leq 3V - 6$ không thỏa mãn đối với đồ thị này, do $E = 10, 3V - 6 = 9$.
Vậy đồ thị K_5 là không phẳng. □

Hệ quả 2 Nếu một đơn đồ thị phẳng liên thông có E cạnh, V đỉnh, với $V \geq 3$ và không có chu trình độ dài 3 thì $E \leq 2V - 4$.

Lời giải (Chứng minh Hệ quả 2) Một đơn đồ thị phẳng liên thông khi vẽ trên một mặt phẳng sẽ chia mặt phẳng thành r miền.
Theo Bổ đề ta có $2E = \sum_R \deg(R)$.
Vì đồ thị không có khuyên hoặc cạnh bội và không có chu trình đơn độ dài 3 và bậc của miền vô hạn ít nhất là 4, nên mỗi miền có bậc ít nhất là 4. Do đó $\sum_R \deg(R) \geq 4r$. Suy ra $\frac{E}{2} \geq r$.
Theo công thức Euler ta có $r = E - V + 2$. Do đó $E - V + 2 \leq \frac{E}{2} \Rightarrow E \leq 2V - 4$. □

Ví dụ Chứng minh đồ thị $K_{3,3}$ là không phẳng.



Lời giải Do đồ thị $K_{3,3}$ không có chu trình độ dài 3 (Vì nó là đồ thị đầy đủ hai phía) nên ta có thể áp dụng Hệ quả 2. Đồ thị $K_{3,3}$ có sáu đỉnh và chín cạnh. Vì $E = 9$ và $2V - 4 = 8$, không thỏa mãn Hệ quả 2.
Vậy đồ thị $K_{3,3}$ là không phẳng. □

4.2. Định lý 4

Định lý 4 *Nếu G là một đồ thị đơn phẳng có $V \geq 3$ đỉnh thì G có nhiều nhất $3V - 6$ cạnh.*

Xem thêm ở [6], trang 77.

LỜI GIẢI Giả sử G có E cạnh và F miền.
Có thể đếm số miền bởi số cạnh bao quanh miền, trong đó f_k là số miền có k cạnh. Ta có

$$F = f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + ...$$

Vì G là đồ thị đơn nên mỗi miền sẽ có ít nhất 3 cạnh. Do đó

$$F = f_3 + f_4 + f_5 + ... \tag{4.2.1}$$

Mà mỗi cạnh là cạnh chung của 2 miền nên

$$2E = 3f_3 + 4f_4 + 5f_5 + ... \tag{4.2.2}$$

Từ (4.2.1) và (4.2.2) ta có:

$$2E - 3F = f_4 + 2f_5 + 3f_6 + ... \geq 0. \tag{4.2.3}$$

Sử dụng đặc trưng Euler $V - E + F = 2$ và (4.2.3) ta được:

$$3V - 6 = 3(2 + E - F) - 6 = 3E - 3F \geq E.$$

Vậy G có nhiều nhất $3V - 6$ cạnh. □

4.3. Định lí 5

Định lý 5 *Mọi đơn đồ thị phẳng có ít nhất một đỉnh có bậc nhỏ hơn hoặc bằng 5.*

LỜI GIẢI Theo chứng minh Định lí 4 ta có

$$2E - 3F = f_4 + 2f_5 + 3f_6 + ... \geq 0. \tag{4.3.1}$$

Giả sử, mỗi đỉnh có bậc nhỏ nhất là 6. Có thể đếm số đỉnh bởi số bậc của đỉnh, trong đó v_i là số đỉnh có bậc i.

$$V = v_6 + v_7 + v_8 + v_9 + ...$$

$$2E = 6v_6 + 7v_7 + 8v_8 + 9v_9 + ...$$

Do đó:

$$2E - 6V = v_7 + 2v_8 + 3v_9 + ... \geq 0. \qquad (4.3.2)$$

Từ (4.3.1) và (4.3.2) suy ra

$$2E - 6V + 2\,(2\mathrm{E} - 3F) = 6E - 6V + 6F \geq 0.$$

Vì vậy $V - E + F \leq 0$ (mâu thuẫn với công thức Euler).
Do đó đồ thị phải có có ít nhất một đỉnh có bậc nhỏ hơn hoặc bằng 5. □

5. Định lí Pick

Định lý 6 (Định lý Pick (1899)) *Diện tích của đa giác đơn P (không nhất thiết lồi) trên mặt phẳng với các đỉnh nguyên được cho bởi công thức*

$$S_P = I + \frac{1}{2}B - 1,$$

trong đó I là số điểm nguyên nằm trong P và B là số điểm nguyên nằm trên biên của P.

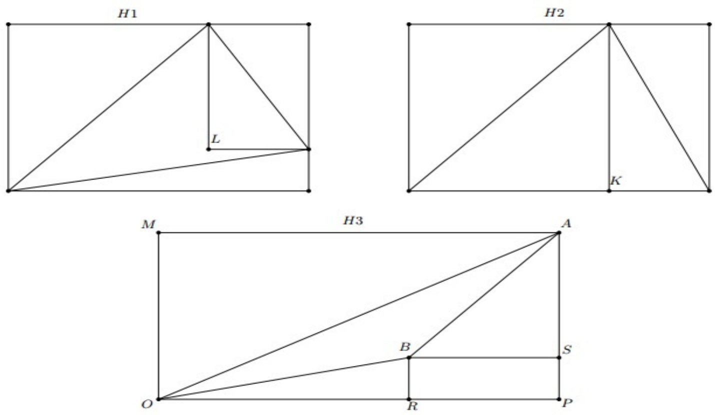
Xem thêm ở [3].

Trước hết ta cần sử dụng kết quả bổ đề sau.

Bổ đề 2 Mọi tam giác cơ bản đều có diện tích bằng $\frac{1}{2}$.

Định nghĩa 3 *Tam giác cơ bản* là tam giác có các đỉnh là các điểm nguyên, đồng thời trên biên và phần trong của nó không còn điểm nguyên nào khác.

Lời giải (Chứng minh Bổ đề 2) Xét một tam giác cơ bản bất kì. Lấy một hình chữ nhật có các cạnh cùng phương với các trục tọa độ sao cho nó chứa cạnh tam giác và mỗi cạnh chứa ít nhất một đỉnh của tam giác. Vì hình chữ nhật có 4 cạnh và tam giác có 3 đỉnh nên có ít nhất một đỉnh của tam giác là đỉnh của hình chữ nhật, mà tam giác là cơ bản nên chỉ xảy ra tình huống ở Hình 14 $H3$ (bỏ qua các trường hợp tầm thường), tình huống mà một cạnh của tam giác là đường chéo của hình chữ nhật (trường hợp Hình 14 $H1$ có điểm nguyên L, Hình 14 $H2$ có điểm nguyên K.)



Hình 14.

Trong Hình 14 $H3$, tam giác cơ bản đang xét là OAB. Khi đó số điểm nguyên nằm trong tam giác OAB là $n_{OAB} = 0$.
Không mất tính tổng quát, ta giả sử $M = (0; m)$, $P = (p; 0)$, $B(b_1; b_2)$, ở đây m, p, b_1, b_2 là các số nguyên dương thỏa mãn $p > b_1$ và $m > b_2$.
Số điểm nguyên nằm trong hình chữ nhật $OMAP$ là $n_{OMAP} = (m-1)(p-1)$.
Mà không có điểm nguyên nào trong số các điểm này nằm trên OA. Suy ra số điểm nguyên nằm trong tam giác OAP là $n_{OAP} = \frac{(m-1)(p-1)}{2}$.
Tính toán tương tự, ta có số điểm nguyên nằm trong tam giác OBR là $n_{OBR} = \frac{(b_1-1)(b_2-1)}{2}$.
Số điểm nguyên nằm trong tam giác BAS là $n_{BAS} = \frac{(p-b_1-1)(m-b_2-1)}{2}$.
Số điểm nguyên nằm trong hình chữ nhật $BSPR$ là $n_{BSPR} = (b_2-1)(p-b_1-1)$.
Số điểm nguyên nằm trên đoạn thẳng BS (khác B và S) là $n_{BS} = p - b_1 - 1$.
Số điểm nguyên nằm trên đoạn thẳng BR (khác B và R) là $n_{BR} = b_2 - 1$.
Mặt khác,

$$n_{OAP} = 1 + n_{OAB} + n_{OBR} + n_{BAS} + n_{BSPR} + n_{BS} + n_{BR}.$$

Suy ra

$$\frac{(m-1)(p-1)}{2} = 1 + \frac{(b_1-1)(b_2-1)}{2} + \frac{(p-b_1-1)(m-b_2-1)}{2} + (b_2-1)(p-b_1-1) + p - b_1 - 1 + b_2 - 1.$$

Do đó $mb_1 - b_2p = 1$, bằng cách cộng trừ diện tích ta có $S_{OAB} = \frac{1}{2}$.

□

LỜI GIẢI **Định lí Pick.** Đầu tiên, ta chia đa giác P thành các tam giác cơ bản. Xét đồ thị G có đỉnh là các điểm nguyên nằm bên trong hay trên biên của P, các cạnh là cạnh của các tam giác cơ bản trong phép chia đang xét. Dễ thấy G là đồ thị phẳng, hữu hạn và liên thông và gồm $f-1$ miền tam giác cơ bản. Gọi f là số mặt, e_i là số cạnh trong (cạnh chung của hai tam giác cơ bản), e_b là số cạnh biên (cạnh nằm trên cạnh của P) của G.

Vì diện tích của tam giác cơ bản bằng $\frac{1}{2}$ nên

$$S_P = \frac{1}{2}(f-1) \tag{5.0.1}$$

Do mỗi cạnh trong là cạnh chung của đúng hai tam giác cơ bản và mỗi cạnh biên là cạnh của đúng một tam giác cơ bản nên

$$3(f-1) = 2\mathrm{e}_i + e_b. \tag{5.0.2}$$

Số đỉnh của G bằng $I+B$, số cạnh bằng $\mathrm{e}_i + e_b$ và số mặt bằng f nên theo công thức Euler ta có

$$I + B - (e_i + e_b) + f = 2. \tag{5.0.3}$$

Ngoài ra, số cạnh ngoài và điểm ngoài là như nhau: $B = e_b$. Nên từ (5.0.1), (5.0.2) và (5.0.3) ta có:

$$S_P = I + \frac{1}{2}B - 1.$$

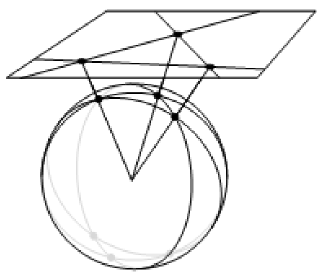
Vậy Định lí Pick được chứng minh. □

6. Định lí Sylvester-Gallai

Xem thêm ở [6], trang 78.

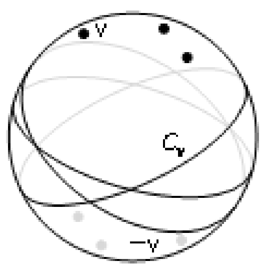
Định lý 7 (Định lí Sylvester-Gallai) Trong mọi tập $n > 2$ điểm trên mặt phẳng, mà tất cả các điểm không nằm trên một đường thẳng, luôn tồn tại một đường thẳng chứa đúng hai điểm.

Lời giải Nếu ta nhúng mặt phẳng $\mathbb{R}^2$ vào $\mathbb{R}^3$ gần mặt cầu S^2.Khi đó với mỗi điểm trên mặt phẳng $\mathbb{R}^2$ sẽ có một đường thẳng đi qua điểm đó và tâm hình cầu nên có sự tương ứng $1-1$ giữa một điểm trên mặt phẳng với cặp điểm đối xuyên tâm trên mặt cầu. Một đường thẳng trên mặt phẳng tương ứng với một đường tròn lớn trên mặt cầu.



Do đó ta có thể phát biểu lại Định lí như sau: *Cho tập hợp $n > 2$ các cặp điểm đối xuyên tâm trên mặt cầu S^2 sao cho chúng không cùng nằm trên một đường tròn lớn. Khi đó có một đường tròn lớn chứa đúng một cặp điểm đối xuyên tâm.*

Giờ ta hoán đổi, thay thế mỗi cặp điểm đối xuyên tâm bởi một đường tròn lớn tương ứng trên mặt cầu. Nghĩa là, thay vì cặp điểm $\pm v \in S^2$ ta xét đường tròn trực giao cho bởi $C_v := \{x \in S^2 : \langle x, v\rangle = 0\}$. (Nếu ta coi v là cực Bắc của hình cầu thì C_v là đường xích đạo).



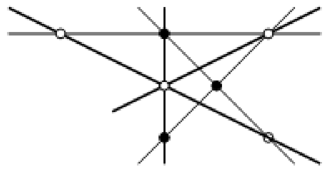
Vì vậy Định lí Sylvester-Gallai yêu cầu ta chứng minh: *Cho tập hợp $n > 2$ các đường tròn lớn trên mặt cầu S^2 sao cho chúng không cùng đi qua một điểm. Khi đó luôn có một điểm là giao của đúng hai đường tròn lớn.*

Sự sắp xếp các đường tròn lớn tạo ra một đơn đồ thị phẳng trên S^2 có đỉnh

là giao của các đường tròn lớn và chia chúng thành các cạnh. Tất cả các đỉnh đều có bậc chẵn và nhỏ nhất là bằng 4 (theo cách dựng). Do đó luôn tồn tại một đỉnh có bậc bằng 4.
Do vậy, luôn có một điểm là giao của đúng hai đường tròn lớn. □

7. Định lí về các đường thẳng đơn sắc

Xem thêm ở [8].



Định lý 8 Cho một tập các điểm "trắng" và "đen" trên mặt phẳng, mà tất cả các điểm không nằm trên một đường thẳng. Khi ấy luôn tồn tại một đường thẳng "đơn sắc" (monochromatic line) chứa tối thiểu hai điểm cùng màu và không chứa điểm khác màu.

Mệnh đề 1 Nếu S là một sự sắp xếp các đường thẳng trong mặt phẳng xạ ảnh với V đỉnh, E cạnh và F miền thì $V - E + F = 1$.

LỜI GIẢI Trường hợp $|S| = 2$ ta có $V = 1$, $E = 2$, $F = 2$. Do đó $V - E + F = 1$.
Giả sử công thức đúng với trường hợp $|S| = n$. Gọi l là đường thẳng không thuộc S và $S' = S \cup \{l\}$. Vì vậy $\left|S'\right| = n + 1$.
Gọi V', E', F' lần lượt là các đỉnh, cạnh và miền của S'. Bằng cách thêm l vào S bổ sung cho đỉnh, cạnh và miền được tạo ra. Đối với mỗi cạnh tạo ra bởi l trong E', một miền của F được chia thành hai. Đối với mỗi đỉnh tạo ra bởi l trong V', một cạnh của E cũng được chia thành hai. Do đó giá trị của biểu thức $V - E + F$ không đổi. Vậy $V - E + F = 1$. □

LỜI GIẢI (Chứng minh Định lý) Ta sử dụng đặc trưng Euler cho đa giác (hay tổng quát hơn là cho đồ thị) trên bán cầu xạ ảnh đối ngẫu. Trong trường hợp này công thức đặc trưng Euler là $V - E + F = 1$ (theo mệnh đề) với V là số đỉnh, E là số cạnh và F là số miền.
Giả sử không tồn tại đỉnh đơn sắc. Gọi r_i là số các đa giác $-i$ cạnh, c là số các góc tạo bởi hai màu khác nhau.
Do không có đa giác $-$ 2 cạnh nên

$$F = \sum_{i \geq 3} r_i. \tag{7.0.1}$$

Do mỗi cạnh là cạnh chung của đúng hai miền nên

$$2E = \sum_{i \geq 3} i r_i. \tag{7.0.2}$$

Do đa giác $-$ 3 cạnh có thể có nhiều nhất 2 góc đơn sắc nên

$$c \leq 2\mathrm{r}_3 + \sum_{i \geq 4} i r_i. \tag{7.0.3}$$

Theo giả thiết mỗi đỉnh đều là đỉnh đơn sắc và mọi vòng cung khác màu giao nhau đều tạo ra ít nhất 4 góc. Do đó

$$c \geq 4V. \tag{7.0.4}$$

Từ (7.0.1), (7.0.2), (7.0.3) và đặc trưng Euler ta có

$$V = 1 - F + E = 1 - \sum_{i\geq 3} r_i + \frac{1}{2}\sum_{i\geq 3} ir_i = 1 - \sum_{i\geq 3}\left(\frac{i}{2} - 1\right) r_i$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 4V &= 4 + \sum_{i\geq 3} 4\left(\frac{i}{2} - 1\right) r_i = 4 + \sum_{i\geq 3} (2i-1)\, r_i \\ &= 4 + 2\mathrm{r}_3 + 4\mathrm{r}_4 + 6\mathrm{r}_5 + 8\mathrm{r}_6 + ... \\ &> 0 + 2\mathrm{r}_3 + 4\mathrm{r}_4 + 6\mathrm{r}_5 + 8\mathrm{r}_6 + ... \geq c. \end{aligned}$$

Do đó $c < 4V$. Mâu thuẫn với điều (7.0.4). Suy ra điều cần chứng minh. □

Kết luận Chương trình và nội dung mới của môn toán trong trường phổ thông theo định hướng *phát triển năng lực* của học sinh. Một số kiến thức mới của toán học như hình học tổ hợp, hình học rời rạc, lí thuyết đồ thị, v.v. sẽ được cập nhật, cho phù hợp với cuộc sống (toán học trong công nghệ thông tin,...). Hy vọng *Đẳng thức Euler*, một công thức mang tính bản chất, sẽ được các giáo viên và học sinh quan tâm.

Tài liệu

[1] Stewart Ian (2015), *17 phương trình thay đổi thế giới*, NXB Trẻ (Dịch từ: Stewart Ian (1945), *17 equations that changed the world*)

[2] Kenneth H.Rosen (1998), *Toán học rời rạc ứng dụng trong tin học*, NXB Khoa học và Kỹ thuật Hà Nội (Dịch từ: Kenneth H.Rosen, *Discrete Mathematics and Its Applications*- McGraw-Hill, 1994).

[3] Nguyễn Trung Tuân, (Tháng 3-2018), *Định lí Pick*, https://nttuan.org/2017/03/18/topic-872/.

[4] David S. Richeson (2012), *Euler's Gem: The Polyhedral Formula and the Birth of Topology,* Oxford.

[5] N. L. Biggs, E. K. Lloyd, R. J. Wilson (2009), *Graph Theory 1736–1936,* Oxford.

[6] A. Martin, Z. Guter (2014), *Proofs from the book,* Springer-Verlag, Berlin, New York.

[7] David Eppstein, "Twenty Proofs of Euler's Formula: $V - E + F = 2$,"https://www.ics.uci.edu/ eppstein/junkyard/euler/.

[8] Jonathan Lorand (2012), *The Sylvester − Gallai Theorem, the Monochrome Line Theorem and Generalizations*, Report for a Seminar on the Sylvester − Gallai Theorem.

Có hay không lớp văn hóa Ấn trước lớp văn hóa Hán?

Nguyễn Lê Anh

Giới thiệu. *Đây là số thứ 11 liên tục chúng tôi luôn đăng chuyên mục phám phá lịch sử thông qua tư duy lô-gích và phương pháp suy luận khoa học. Chúng tôi muốn giới thiệu với độc giả chúng ta có thể làm được những gì với tư duy toán học, thông qua những nghiên cứu miệt mài của nhà toán học Nguyễn Lê Anh. Trong số này, chúng tôi tiếp tục đăng những ghi chép của ông, những nổ lực không ngừng nghỉ cùng với những khám phá mới. Đây cũng là lời kêu gọi cộng đồng trong việc cùng chung tay xây dựng một tài liệu lịch sử cho dân tộc chúng ta - dân tộc Việt Nam.*

Vào thời kỳ trước Công Nguyên, sông Cà Lồ là một con sông rất lớn rộng tới 2 dặm, 700m. Nó là con sông chính chảy qua khu vực Bình Lệ Nguyên, là vùng có kinh tế phát triển nhất ở vùng đồng bằng Bắc Bộ.

Con sông lớn thì luôn có tên. Tên của sông phải là thứ mọi người dân đều cảm nhận được nét đặc trưng để họ truyền khẩu. Hầu hết tên núi và tên sông xuất phát từ gốc chữ Hán đều liên quan tới các từ có nghĩa. Tên sông Cà Lồ không thể bắt nguồn từ âm Hán hay âm Việt. Trong từ điển tiếng Champa thì âm calaoh có nghĩa là "rắn nước". Cũng có thể cái tên Cà Lồ hàm ý ngoằn nghèo, mà cũng có thể con sông này có rất nhiều rắn nước.

泠Mê Linh huyện
Tự mê là nhại thanh được tạo ra từ 米鹿
Độ thông dụng trong Hán ngữ cổ: rất thấp
Độ thông dụng trong tiếng Trung hiện đại: rất thấp
Bộ mễ 米
Bộ lộc 鹿là con hươu. Con này thoát ẩn thoắt hiện.
Tự linh 泠là từ nhại thanh được tạo ra từ bộ thuỷ [1] và bộ linh 令
Độ thông dụng 泠trong Hán ngữ cổ: thấp
Độ thông dụng 泠trong tiếng Trung hiện đại: thấp Bộ Thủy[2]là thu gon của bộ thủy 水. Bộ linh 令
Độ thông dụng trong Hán ngữ cổ: rất cao
Độ thông dụng trong tiếng Trung hiện đại: rất cao
nó hàm ý nói về mệnh lệnh, sự linh thiêng.

Như vậy 泠là nhại thanh, tức sử dụng một số tự có âm gần đúng với âm thanh của người dân bản xứ mà nhại.

Như vậy Mê Linh 泠trong các cổ thư Hán là từ nhại thanh của âm có sẵn. Âm này cũng không phải là âm Việt.

Sông Hát, Cổ Loa cũng là những âm như vậy, không phải bắt nguồn từ âm Hán cũng như âm Việt.

Như thế tên địa danh và các dòng sông thuộc khu vực liên quan tới Bà Trưng là thuộc một phân tầng lịch sử của dân tộc Việt.

Vào khoảng 1200 năm trước Công Nguyên, có một dòng dân di cư khoảng từ 200 cho tới 2000 người dọc theo sông Thao tới vùng Phùng Nguyên. Họ được gọi là các Vua Hùng. Di chỉ khảo cổ cho thấy xuất hiện 4 chiếc Nha Chương là đặc trưng của nhóm người họ Phùng di cư từ vùng Tân Cương tới. Hậu duệ của dòng dân di cư này là cộng đồng họ Phùng ở vùng từ chân núi Ba Vì, qua Đường Lam và thành cổ Sơn Tây tới ven bờ sông Hồng nay. Các khảo cứu từ Trung Quốc cho thấy cộng đồng cư dân họ Phùng đã chuyển sang chế độ Phụ hệ từ rất lâu trước đó. Chế độ Phụ hệ quản lý xã hội tốt hơn là Mẫu hệ. Câu truyện Phù Đổng Thiên Vương có thể là dấu vết của các cuộc chiến bành trướng của hậu duệ các vua Hùng về phía nam. Khả năng rất lớn là sau 1200 năm thì khu vực Hatmon, Melinh và toàn bộ vùng Bình Lệ Nguyên (Vĩnh Phúc, Bắc Ninh) là các khu vực liền với Sơn Tây cũng đã là bước vào chế độ

[1]Phần bên trái của tự linh, do hạn chế, Epsilon không thể hiện được bộ này.
[2]xem chú thích trước.

Phụ hệ.

Cuộc chiến Bà Trưng đánh và tiêu diệt quá nửa trong số 20 nghìn quân của Mã Viện cho thấy, đây là một cuộc chiến rất lớn và khốc liệt. Cổ sử nhà Hán ghi rõ cuộc chiến này do đích thân Hán Quang Vũ Đế ra lệnh đánh. Như vậy 20 nghìn quân tham chiến của Mã Viện là quân thiện chiến. Vậy thì quân của Bà Trưng cũng phải ở mức độ thiện chiến nhất định mới có thể tiêu diệt được quá nửa quân của Mã Viện. Để có được quân chống lại Mã Viện, Bà Trưng phải huy động quân ở một khu vực tương đối rộng. Điều này cho thấy Bà Trưng là một nhà nước và khả năng rất cao đó là chế độ Phụ hệ.

Các công trình khảo cổ đã chỉ ra thành Cổ Loa được đắp vào khoảng thời gian 260 trước Công Nguyên. Thủy Kinh Chú có ghi thành Nê Lê ven sông Trường Giang (đoạn từ sông Hồng tới sông Đuống) do A dục Vương, tức vua Ashoka, xây. Ở Bắc Bộ tất cả các thành đều được xây vào khoảng thế kỷ thứ 2 sau Công Nguyên, chỉ duy nhất thành Cổ Loa là được xây vào khoảng thế kỷ thứ 2 trước Công Nguyên. Như thế Thành Cổ Loa là thành Nê Lê do A Dục Vương Xây.

Nội dung nghiên cứu "Khảo sát khảo cổ học di tích Khao Làng, xã Nghi Thạch, huyện Nghi Lộc, tỉnh Nghệ An"của nhà khảo cổ học Phạm Huy Thông, được công bố trên Tạp chí Khảo cổ học số 4 năm 1976 cho thấy khu vực Nghệ An có nhiều mỏ đồng tiền sử từ 3000 năm về trước. "Nghiên cứu địa chất khoáng sản các mỏ đồng xã Nghi Phú, huyện Nghi Lộc, tỉnh Nghệ An"của các tác giả: Nguyễn Văn Hùng, Vũ Quang Vinh và Đặng Văn Hùng. Bài báo này trình bày kết quả nghiên cứu địa chất khoáng sản của các mỏ đồng tại xã Nghi Phú, huyện Nghi Lộc, tỉnh Nghệ An, trong đó có đề cập đến niên đại của các mỏ đồng tiền sử.

Như vậy khu vực Nghệ An có nhiều mỏ đồng và thiếc tiền sử 3000 năm tuổi. Vào thời kỳ 2800 năm cho tới 2000 về trước đồng chính là vàng. Đồng vừa được dùng làm tiền trong giao thương và tích lũy vốn, vừa được dùng để chế tác vũ khí và công cụ lao động. Vương quốc của Ashoka bao gồm toàn bộ Ấn Độ nay, qua Iran tới bờ Địa Trung Hải, lên quá vành đai Thảo Nguyên và tới tận phía Đông Dương. Một vương quốc rộng lớn như vậy với dân số ước tính vài chục triệu thì nhu cầu đồng là rất lớn. Cuộc chiến Ashoka phát động đánh về phía Đông là vào thời kỳ "cơn sốt Vàng (đồng)". Di tích khảo cổ và di tích được ghi nhận trong Thủy Kinh Chú cho thấy Ashoka đã tới Cổ Loa.

Có lẽ A Dục Vương đã để lại dấu ấn là sự bắt đầu giao thương biển cùng với việc xuất hiện các đồ đồng "Đông Sơn"được đúc tinh xảo. Rất có thể vùng đất Cổ Loa - Mê Linh là nơi chịu ảnh hưởng của A Dục Vương. Vào cùng thời gian này, ở miền Trung Việt Nam xuất hiện vương quốc Champa. Rất có thể cuộc chiến Ashka đã kích thích các cuộc di dân. Theo dõi kỹ lịch sử Champa thì chúng ta có thể nhận ra đệm của tên gọi của các vị vua Champa là Bà.

Bà Tấm - Po Nraop (chữ Hán: 婆) là em trai của vua Po Rome, và là vua của tiểu quốc Panduranga (Chiêm Thành) từ năm 1651 đến năm 1653. Bà Tranh - Po Saot hay Bà Tranh (Wan Dam, chữ Hán: 婆) là con trai của Po Rome, làm vua Chiêm Thành từ khoảng năm 1659 đến năm 1693. Po Rome là vua của tiểu quốc Panduranga (Chiêm Thành) từ năm 1627 đến năm 1651. Ông là con rể của Po Klong M'hnai. Năm 1631, Công nữ Ngọc Khoa được gả cho Po Rome.

Dưới tiền triều Po Ehklang, Po Klong M'hnai được ban tước hiệu Maha Taha

Theo từ điển Champa - Việt thì từ po O π ⁄ [Bkt.] 1 d. ngài, trời, đấng. Có bạn nào biết tốt lịch sử Champa và các dòng họ Champa thì cho ý kiến. Rất có thể âm Bà trong tên gọi Bà Trưng là Po - 婆. Nếu vậy Bà Trưng là một vị vua đàn ông! Bà Trưng tức vua Trưng.

Câu truyện "Chọi Trâu"chỉ có duy nhất ở cư dân Minangkabau (một dân tộc ở tây Sumatra, indonesia) và dân tộc Kinh. Các di chỉ văn hóa của Mianangkabau tương đồng hoàn toàn với các hoa văn trên trống đồng Ngọc Lũ. Truyền thuyết cũng như nét tương đồng văn hóa cho thấy Mianangkabau có sự tương đồng văn hóa với người Kinh ở đồng bằng Bắc Bộ. Các tính toán cho thấy đã có khoảng vài trăm người di cư tới vùng tây Sumatra vào khoảng trước Công Nguyên 200 năm. Kết hợp với truyền thuyết An Dương Vương (A Dục Vương) đánh nhau với Triệu Đà, thu chạy ra biển ở của Hiền. Rõ ràng là truyền thuyết có nhắc tới việc Mị Châu mặc áo lông, tức mùa đông. Điều này cũng phù hợp với sự kiện quân Triệu Đà muốn di chuyển từ phía bắc tới Cổ Loa bằng đường biển thì phải là lúc có gió mùa Đông Bắc. Ngoài ra chỉ có thể di chuyển tới tây Sumatra vào mùa đông khi có các đợt gió bắc thổi về phía nam. Như vậy khả năng rất cao Triệu Đà đã có một lượng nhỏ quân, lợi dụng gió mùa Đông Bắc, di chuyển theo ven biển tiến đánh A Dục Vương. A Dục Vương thua trận và đã chạy từ cửa Hiền, và sau đó lên tàu chạy tới vùng tây Sumatra của Indonesia. Đây là khu vực gần với Ấn Độ. Khu vực cửa Hiền nằm cách không xa các mỏ đồng tiền sử ở Nghệ An. Nhiều trống đồng Đông Sơn được xác định là thuộc định dạng và có hoa văn như trông đồng Ngọc Lũ được tìm thấy ở Malaysia. Vậy khả năng cao nơi đây từng là cảng biển, có nhiều tàu thuyền viễn dương.

Trên thực tế thì không có một tài liệu nào vào thời kỳ đầu Công Nguyên khẳng định Ashoka (A Dục Vương) xuất hiện ở đâu, ngoài sự kiện thành Nê Lê ở trong Thủy kinh Chú.

Kết hợp các sự kiện lại chúng ta có thể nhận thấy có một phân tầng lịch sử chịu sự ảnh hưởng của văn hóa Ấn Độ trước khi chịu sự ảnh hưởng của văn hóa Hán. Theo đó, khu vực Đông Dương là nơi có nhiều mỏ đồng lộ thiên. Vì thế vào khoảng năm 260 trước Công Nguyên, do các cơn sốt đồng mà cư dân nhiều nơi đã di cư về khu vực Đông Dương.

Văn minh Funan là cùng thời với nền văn hóa Óc Eo, khoảng từ thế kỷ thứ 1 tới thứ 7.

Chúng ta có thể phải mất rất nhiều thời gian để có thể tìm hiểu được mối liên quan giữa dân tộc Kinh với Champa với Funan và Chân Lạp.

Tạp chí Epsilon, Số 23, 06/2023

TIẾP CẬN TỔNG THỂ TỚI DẠY NGÔN NGỮ VÀ TOÁN

NGUYỄN ÁI VIỆT

Giới thiệu. *Nếu như Trí khôn nhân tạo sẽ thay đổi yêu cầu về nhân lực trong tương lai, vai trò của các nhà bác học đa ngành (polymaths) và các chuyên gia tổng quát (expert generalists) sẽ ngày càng lớn, với vai trò tạo ra kết nối giữa các mảng tri thức chuyên ngành, tạo ra giá trị mới.*

1. Nếu như Trí khôn nhân tạo sẽ thay đổi yêu cầu về nhân lực trong tương lai, vai trò của các nhà bác học đa ngành (polymaths) và các chuyên gia tổng quát (expert generalists) sẽ ngày càng lớn, với vai trò tạo ra kết nối giữa các mảng tri thức chuyên ngành, tạo ra giá trị mới. Điều đó có nghĩa là Toán học và Ngôn ngữ sẽ trở lại vai trò như chúng đã từng có ở Kỷ nguyên Phục hưng và Bừng sáng. Tuy nhiên, trong tương lai Toán học và Ngôn Ngữ sẽ phải có một diện mạo mới. Vì vậy việc dạy Toán và Ngôn Ngữ sẽ phải thay đổi đến tận gốc rễ từ Tiểu học hoặc sớm hơn nữa. Trong bài này, chúng tôi sẽ trình bày quan điểm dạy Toán và Ngôn Ngữ theo quan điểm tổng thể. Thay vì kêu gọi một chương trình cải cách giáo dục, mà chắc chắn sẽ biến dạng và chẳng đi đến đâu, chúng tôi dự định tiến hành tiếp cận này bằng các khóa bổ trợ, nhằm vá cách mảnh trí thức manh mún, có nguy cơ trở thành vô dụng.

2. Vào những năm 1990, người ta đã nhận ra rằng việc dạy Ngôn Ngữ theo cách phân tích thành các đơn vị nhỏ và tiến hành lắp ráp lại từ đầu ngày càng trở nên lạc hậu, tốn công sức, thời gian và hiệu quả thấp. Cách tiệm cận tổng thể tới Ngôn ngữ (Whole language approach) đã được chấp nhận rộng rãi [1]. Theo đó, việc dạy Ngôn ngữ được tiến hành theo các dạng thức mà người học sẽ tìm thấy nó trong cuộc sống. Việc giản lược Ngôn ngữ thành các câu mẫu ngô nghê ít gặp trong cuộc sống sẽ đòi hỏi nhiều công sức soạn giáo trình, và ngược lại cũng đòi hỏi nhiều công sức hơn để học viên xóa chúng khỏi bộ nhớ để thích nghi với Ngôn ngữ được sử dụng thực sự trong cuộc sống. Các thử nghiệm thành công đã chứng tỏ cách tiệm cận tổng thể có nhiều ưu thế trong đào tạo hiệu quả hơn. Trong lớp học, thay vì "xay"và "khoan"các mảnh vụn ngôn ngữ, để chết chìm trong những đống quy luật vô nghĩa, người học được tiếp cận tới bức tranh tổng thể, và nhận biết các vấn đề về sử dụng ngôn ngữ để tiếp thụ và diễn đạt các ý tưởng phức tạp.

3. Cách tiếp cận này tới Ngôn Ngữ lập tức có ảnh hưởng tới chương trình học. Thay vì phải đắm mình vào các vấn đề "tự thân"của Ngôn Ngữ, do băm nát Ngôn ngữ thành cách mảnh vụn, rồi đi tìm các quy tắc, mà tuyệt đại đa số có ngoại lệ, để ghép chúng lại với nhau, môn Ngữ Văn được quan niệm là công cụ để nhận thức. Giờ Ngữ Văn hoặc học Tiếng, sẽ dùng để đọc, viết, nghe và nói về các đề tài xuyên suốt qua các mảng tri thức khác nhau. Ngữ Văn sẽ hòa trộn với tri thức và tư duy thay vì bị tách biệt thành quy tắc và tín điều phải chấp nhận. Trong cách tiếp cận này, học sinh sẽ thực sự thao tác, xây dựng ngữ nghĩa trong các project do họ tiến hành, mà kết quả không phải là duy nhất hay phải chấp nhận thụ động từ giáo viên.

4. Vấn đề đặt ra là có thể xây dựng một quan điểm tương tự đối với việc dạy Toán hay không [2]. Cá nhân tôi đã có những thử nghiệm để chứng minh quan điểm: Học sinh kém và ghét Toán bắt đầu từ yếu kém trong việc sử dụng ngôn ngữ. Trước khi giúp các học sinh này học Toán cần phải sửa lỗi sử dụng Ngôn Ngữ trong Toán học và điều đó gắn liền với việc dạy sử dụng Logic trong Ngôn Ngữ. Do đó, tôi đi đến một quan điểm dạy Ngôn Ngữ kết hợp với dạy Toán sẽ giúp phát triển tư duy của trẻ một cách lành mạnh và hiệu quả cho cả học Ngôn Ngữ và học Toán. Nếu có thể dạy Ngôn Ngữ theo tiệm cận tổng thể, quan điểm này cũng sẽ dẫn tới dạy toán theo tiệm cận tổng thể. Chúng ta sẽ coi đó là một giả thuyết và sẽ tìm cơ sở cho nó.

5. Trước hết, chúng ta sẽ xem xét sự tương đồng của Toán học và Ngôn Ngữ. Việc đưa ra một định nghĩa chính xác cho Toán học khó khăn là bởi vì có 3 cách tiếp cận đến Toán học: i. Các tiếp cận logic (coi logic là cơ sở của Toán học), ii. Tiếp cận tạo dựng (coi số tự nhiên là cơ sở của Toán học) và iii. Tiếp cận hình thức (xây dựng Toán học dưới dạng một chuỗi suy diễn hình thức, phi mâu thuẫn). Tuy định lý Godel đã phủ nhận quan điểm iii., nhưng tiếp cận hình thức vẫn là cách tiếp cận chủ đạo hiện nay từ các trường và viện nghiên cứu, tới Tiểu học, thậm chí Mẫu giáo. Do đó gần đây, đã có nhiều ý kiến quanh việc khắc phục các hệ quả của quan niệm này trong giáo dục [2].

6. Tôi cho rằng, ít nhất đối với đa số người ứng dụng Toán trong cuộc sống, Toán học có thể được coi là một ngôn ngữ để mô tả (định tính và định lượng), kiểm tra tính đúng đắn, suy diễn các tri thức khác nhau được trừu tượng hóa. Như vậy, dạy Toán ở Phổ thông, đặc biệt ở Tiểu học nên bắt đầu bằng các hoạt động phổ quát như đếm, đo, xác định vị trí, thiết kế, quan sát, suy diễn và giải thích [3]. Đương nhiên các hoạt động này phải được thực hiện trong các văn cảnh cụ thể của các vấn đề khoa học, công nghệ, xã hội, kinh tế,... Có người cho rằng Toán học khác Ngôn Ngữ ở chỗ nó có những nội dung độc lập với các đối tượng mà nó mô tả. Tuy nhiên Ngôn Ngữ cũng có các nội dung tự thân của nó. Tôi đồng ý với quan điểm cho rằng Toán học và Ngôn ngữ là hai thiết chế xã hội cơ bản có liên quan với nhau.

7. Trong tiếp cận Toán học tổng thể (Whole Mathematics) sẽ có các đặc trưng [2]

a. Đào tạo Toán học phải tiếp cận tới Toán học như một tổng thể, tìm kiếm tối đa điểm liên quan giữa các lĩnh vực Toán học khác nhau

b. Nhấn mạnh tới các chức năng của Toán học

c. Dạy theo các dự án, có mục tiêu xác định, để lựa chọn công cụ Toán học phù hợp

d. Học sinh sẽ đóng vai trò chủ động hơn trong việc xác định nội dung học (thông qua các chuyên đề tự chọn, tự nghiên cứu)

e. Toán cần được tích hợp theo các nội dung ứng dụng

f. Các hình thức mô tả toán học khác nhau của cùng một khái niệm cần được khai thác

g. Ý nghĩa cần được đặt ưu tiên cao hơn kỹ năng biến đổi công thức

h. Toán không phải là kỹ năng tính, mà cần thể hiện các ý tưởng mà nó biểu diễn một cách sâu sắc.

8. Hơn nữa, theo quan điểm của tôi, Toán học có thể dạy cùng với Ngôn Ngữ, dựa trên logic, để diễn tả những thông điệp khác nhau về Văn hóa, Xã hội, Khoa học và thế giới xung quanh ta. Như vậy, Toán học sẽ đi vào thực tế mạnh mẽ như Ngôn Ngữ, giúp Ngôn Ngữ thêm phần tư duy, tránh sáo mòn áp đặt. Đó chính là cái chúng ta cần trong tương lai của Trí khôn nhân tạo và Tính toán phỏng não. Đó là thời đại mà các tư tưởng Phục Hưng và Bừng sáng sẽ trở lại đưa nền văn minh này khỏi các bế tắc hiện nay.

[1] Davenport, M. R. & Watson, D. J. (1993) Whole language: philosophy and work-in progress, in S. K. Brady & T. M. Sills (Eds) Whole Language, History, Philosophy and Practice, pp. 1-17. Dubuque: Kendall/Hunt.

[2] A.L.B.Diaz, A Whole Language Approach in Mathematics Classrooms, Curriculum Studies, 6:1, (1998) 97-112,

[3] Bishop, A. J. (1988) Mathematical Enculturation: a cultural perspective on mathematics education. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Sự cần thiết của bất đối xứng

Trần Văn Trản

Giới thiệu. *Các nhà vật lý lý thuyết say mê tính đối xứng, và nhiều người tin rằng các phương trình nên phản ánh vẻ đẹp này. Trong thực tế, phương trình toán học được xây dựng trên tính đối xứng đã dự đoán chính xác sự tồn tại của phản vật chất. Nhưng sẽ là sai lầm nguy hiểm khi đánh đồng sự thật và cái đẹp với sự đối xứng. Cả sinh vật sống lẫn bản thân Vũ trụ đều không đối xứng hoàn hảo.*

Hình thể con người có vẻ như là đối xứng. Trên thực tế Thượng Đế dùng một lớp da thịt để tạo nên sự đối xứng đó còn cấu trúc bên trong thì rất không đối xứn. Đối xứng là đẹp, nhưng bất đối xứng là lý do tại sao Vũ trụ và sự sống tồn tại.

Vũ trụ có sự bất đối xứng, nhưng đó là một điều tốt. Sự không hoàn hảo là điều cần thiết cho sự tồn tại của các ngôi sao và thậm chí cả sự sống.

Các nhà vật lý lý thuyết say mê tính đối xứng, và nhiều người tin rằng các phương trình nên phản ánh vẻ đẹp này. Trong thực tế, phương trình toán học được xây dựng trên tính đối xứng đã dự đoán chính xác sự tồn tại của phản vật chất. Nhưng sẽ là sai lầm nguy hiểm khi đánh đồng sự thật và cái đẹp với sự đối xứng. Cả sinh vật sống lẫn bản thân Vũ trụ đều không đối xứng hoàn hảo.

Ta biết, những người thuận tay trái là thiểu số với tỷ lệ khoảng 1:10. Nhưng đừng nhầm lẫn: Vũ trụ yêu thích sự thuận tay trái, từ các hạt hạ nguyên tử cho đến chính sự sống. Trên thực tế, nếu không có sự bất đối xứng cơ bản này trong Tự nhiên, Vũ trụ sẽ là một nơi nhạt nhẽo, hầu hết chứa đầy bức xạ và không có các ngôi sao, hành tinh hay sự sống. Tuy nhiên, vẫn có một ý tưởng phổ biến trong các ngành khoa học vật lý thúc đẩy sự hoàn hảo về mặt toán học - được biểu thị bằng tính đối xứng - như bản thiết kế của Tự nhiên. Và, như thường lệ, chúng ta bị lạc vào một tình huống mập mờ như phải chọn phe: "tất cả là đối xứng" hay "chủ nghĩa không hoàn hảo".

Nhà vật lý vĩ đại Paul Dirac đã nói: "Điều quan trọng là phải có vẻ đẹp trong phương trình bất kỳ hơn là để chúng phù hợp với thí nghiệm." Nếu bất kỳ nhà vật lý nào khác ít được biết đến hơn nói như vậy, họ có thể sẽ bị các đồng nghiệp chế giễu. Nhưng đó là Dirac, và phương trình tuyệt vời của ông, được xây dựng dựa trên các khái niệm đối xứng, đã dự đoán sự tồn tại của phản vật chất, thực tế là mọi hạt vật chất (như electron và quark) đều có một phản hạt đồng hành. Đó là một thành tựu thực sự đáng kinh ngạc - toán học đối xứng, được áp dụng cho một phương trình, đã hướng dẫn con người khám phá toàn bộ lĩnh vực phản vật chất tồn tại song song. Chẳng trách Dirac lại sùng bái thần Đối Xứng đến vậy. Nó hướng dẫn suy nghĩ của ông hướng tới một khám phá đáng kinh ngạc Lưu ý rằng phản vật chất không có ý nghĩa lập dị như người ta tưởng. Các phản hạt không bay lên trong trường hấp dẫn. Chúng có một số tính chất vật lý bị đảo ngược, đáng chú ý nhất là điện tích. Vì vậy, phản hạt của electron tích điện âm, được gọi là positron, có điện tích dương.

Nhưng ở đây có vấn đề mà Dirac đã lãng quên. Các định luật Tự nhiên quy định hành vi của các hạt cơ bản dự đoán rằng vật chất và phản vật chất phải phong phú như nhau, nghĩa là chúng sẽ xuất hiện theo tỷ lệ 1:1. Mỗi electron có một positron tương ứng. Tuy nhiên, nếu sự đối xứng hoàn hảo này xảy ra thì một phần nhỏ của giây sau Vụ nổ lớn, vật chất và phản vật chất sẽ bị triệt tiêu thành bức xạ (chủ yếu là photon). Nhưng rõ ràng đó không phải là những gì đã xảy ra. Khoảng một trong một tỷ (đánh giá thô) hạt vật chất tồn tại dưới dạng dư thừa. Và điều đó thật tốt, bởi vì mọi thứ chúng ta thấy trong Vũ trụ - các thiên hà, các ngôi sao, các hành tinh và các vệ tinh của chúng, sự sống trên Trái đất, mọi loại vật chất kết khối, sống và không sống - đều đến từ phần dư thừa nhỏ bé này nhờ sự bất đối xứng này giữa vật chất và phản vật chất.

Trái ngược với sự đối xứng và vẻ đẹp được mong đợi của vũ trụ, các nghiên cứu trong những thập kỷ qua đã chỉ ra rằng các quy luật Tự nhiên không áp dụng như nhau cho vật chất và phản vật chất. Cơ chế nào đã tạo ra sự dư thừa nhỏ bé này-sự không hoàn hảo chịu trách nhiệm cho sự tồn tại của chúng ta, là một trong những câu hỏi mở lớn nhất trong vật lý hạt và vũ trụ học.

Theo ngôn ngữ của các đối xứng bên trong ("bên trong" nghĩa là thay đổi tính chất của một hạt) và đối xứng bên ngoài ("bên ngoài" giống như chuyển động quay của một vật thể), tồn tại một phép toán đối xứng bên trong làm thay đổi một hạt vật chất thành một phản vật chất. Hoạt động này được gọi là "liên hợp điện tích" và được biểu thị bằng chữ in hoa C. Sự bất đối xứng vật chất-phản vật chất quan sát được ngụ ý rằng Thiên nhiên không biểu thị tính đối xứng liên hợp điện tích: trong một số trường hợp, các hạt và phản hạt của chúng không thể biến thành nhau. Cụ thể, đối xứng C bị vi phạm trong các tương tác yếu, lực chịu trách nhiệm cho sự phân rã phóng xạ. Thủ phạm là neutrino, loại hạt kỳ lạ nhất trong tất cả các hạt đã biết do chúng đi xuyên qua vật chất mà hầu như không bị cản trở. Có khoảng một nghìn tỷ neutrino mỗi giây đến từ Mặt trời và đi qua bạn ngay bây giờ.

Để biết tại sao neutrino vi phạm đối xứng C, chúng ta cần thêm một đối xứng bên trong gọi là tính chẵn lẻ, được biểu thị bằng chữ P. Một "phép tính chẵn lẻ" biến một vật thể thành hình ảnh phản chiếu của nó. Ví dụ, bạn không phải là bất biến chẵn lẻ. Hình ảnh phản chiếu của người có trái tim ở phía bên phải. Đối với các hạt, tính chẵn lẻ liên quan đến cách chúng quay như các đỉnh. Nhưng các hạt là những đối tượng lượng tử. Điều này có nghĩa là chúng chỉ có thể quay với số vòng được "lượng tử hóa", nghĩa là chúng chỉ có thể quay theo một số cách, giống như các bản ghi đĩa hát kiểu cũ chỉ có thể phát ở ba tốc độ: 33, 45 và 78 vòng/phút. Lượng spin nhỏ nhất mà một hạt có thể có là một "tốc độ"quay. Nó giống như một cái đỉnh quay thẳng lên. Nhìn từ trên xuống, nó có thể quay theo chiều kim đồng hồ hoặc ngược chiều kim đồng hồ. Electron, quark và neutrino là như vậy. Chúng ta nói rằng chúng có vòng quay 1/2 và nó có thể là +1/2 hoặc -1/2, hai tùy chọn tương ứng với hai hướng quay. Áp dụng phép toán C trên một neutrino thuận tay trái, chúng ta sẽ thu được một phản neutrino thuận tay trái. Vấn đề là, không có phản neutrino thuận tay trái nào trong Tự nhiên. Chỉ có neutrino thuận tay trái. Các tương tác yếu, tương tác duy nhất mà neutrino cảm nhận được (ngoài lực hấp dẫn), vi phạm đối xứng liên hợp điện tích. Đó là sự không vui của những người yêu thích sự đối xứng.

Nhưng hãy tiến thêm một bước nữa. Nếu chúng ta áp dụng cả C và P (tính chẵn lẻ) cho một neutrino thuận tay trái, chúng ta sẽ nhận được một phản neutrino thuận tay phải: C biến neutrino thành phản neutrino và P biến thuận tay trái thành thuận tay phải . Và thu được phản neutrino thuận tay phải! Dường như có một sự may mắn. Các tương tác yếu vi phạm C và P một cách riêng biệt nhưng dường như thỏa mãn hoạt động đối xứng CP kết hợp. Trong thực tế, điều này có nghĩa là các phản ứng liên quan đến các hạt thuận tay trái sẽ xảy ra với cùng tốc độ như các phản ứng liên quan đến các phản hạt thuận tay phải. Có hy vọng rằng Tự nhiên là đối xứng CP trong tất cả các tương tác đã biết. Người đẹp đã quay trở lại. Nhưng, năm 1964, James Cronin và Val Fitch phát hiện ra một sự vi phạm nhỏ đối xứng CP kết hợp trong sự phân rã của một hạt gọi là kaon trung hòa, được ký hiệu là K0. Về cơ bản, K0 và các phản hạt của chúng không phân rã với tốc độ như lý thuyết đối xứng CP dự đoán. Cộng đồng vật lý lại bị sốc. Vẻ đẹp đã lại biến mất. Và nó đã không bao giờ phục hồi. Vi phạm CP là một sự thật của Tự nhiên.

Vi phạm CP thậm chí còn có một hàm ý sâu sắc và bí ẩn hơn: các hạt cũng chọn một hướng thời gian ưa thích. Sự bất đối xứng của thời gian, dấu hiệu của một Vũ trụ đang mở rộng, cũng xảy ra ở cấp độ vi mô! Đây là một chủ đề rất lớn.

Còn một sự thật bùng nổ khác về sự không hoàn hảo. Cuộc sống cũng được "trao tay": các axit amin và đường bên trong tất cả các sinh vật sống từ amip đến nho, cá sấu đến con người đều thuận tay trái và tay phải. Trong phòng thí nghiệm, người ta tạo ra hỗn hợp 50:50 của các phân tử thuận tay trái và thuận tay phải, nhưng đó không phải là những gì chúng ta thấy trong Tự nhiên. Cuộc sống hầu như chỉ ưu tiên axit amin thuận tay trái và đường thuận tay phải. Một lần nữa, đây là một câu hỏi khoa học mở rất lớn.

Một vài tính chất hình học trên một cấu hình về Tỷ số Vàng

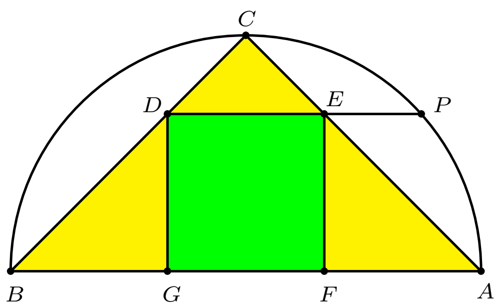
Trần Quang Hùng

Giới thiệu. *Bài viết giới thiệu một tính chất hình học trên một cấu hình về phép dựng Tỷ số Vàng dùng hình vuông nội tiếp trong một tam giác vuông cân.*

1. Mở đầu

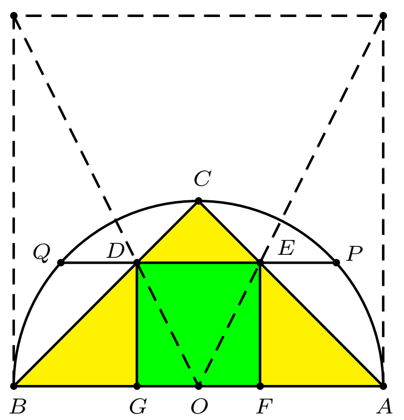
Trong [1], tác giả đã giới thiệu một phép dựng Tỷ số Vàng sử dụng hình vuông nội tiếp tam giác vuông cân như sau

Định lý 1 Cho tam giác vuông cân ABC cùng với đường tròn ngoại tiếp của nó, nội tiếp một hình vuông $DEFG$ với cạnh FG dọc theo cạnh huyền AB. Nếu cạnh DE kéo dài cắt đường tròn ngoại tiếp tại P, thì E chia DP theo Tỷ số Vàng $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ (xem Hình 1).



Hình 1. Phép dựng Tỷ số Vàng với hình vuông nội tiếp tam giác vuông cân.

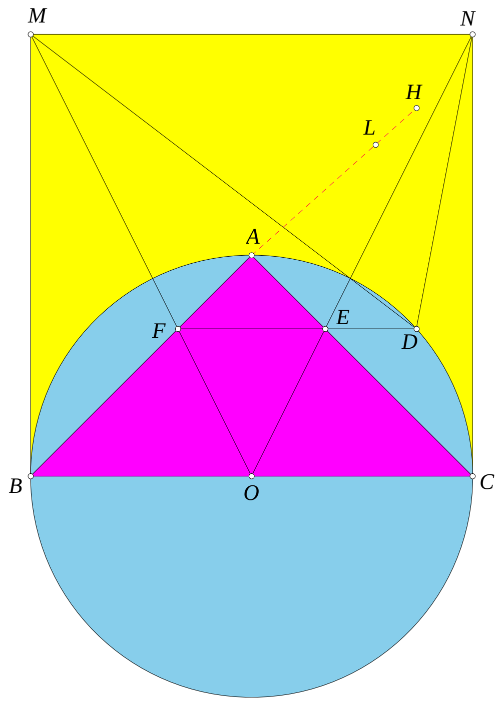
Phép dựng hình vuông $DEFG$ nội tiếp tam giác vuông cân ABC có thể được mô tả đơn giản qua hình vẽ dưới đây (xem Hình 2).



Hình 2. Mô tả phép dựng hình vuông nội tiếp tam giác vuông cân.

Trong việc tìm hiểu cấu hình về Tỷ số Vàng của Định lý 1, chúng tôi nhận thấy đây là một cấu hình thú vị, có thể chứa đựng nhiều bài toán mới. Thông qua một ví dụ là Định lý 2 dưới đây, chúng tôi muốn giới thiệu với bạn đọc cấu hình của Định lý 1. Chúng tôi đề xuất một tính chất hình học như sau

Định lý 2 Cho tam giác ABC vuông cân tại A và nội tiếp trong đường tròn (O). Dựng hình vuông $BCNM$ vào trong tam giác ABC. Các đường thẳng OM và ON cắt các đường thẳng AB và AC lần lượt tại F và E. Tia FE cắt (O) tại D. Khi đó đường thẳng nối trực tâm và điểm Lemoine của tam giác DMN đi qua A (xem Hình 3).



Hình 3. Minh họa cho Định lý 2.

Chú ý. Định lý 2 cũng đã tác giả được giới thiệu như một bài toán trong [2].

2. Một chứng minh cho Định lý 2

Trong mục này chúng tôi giới thiệu lời giải của tác giả **Nguyễn Cung Thành** từ [2] (xem Hình 4).

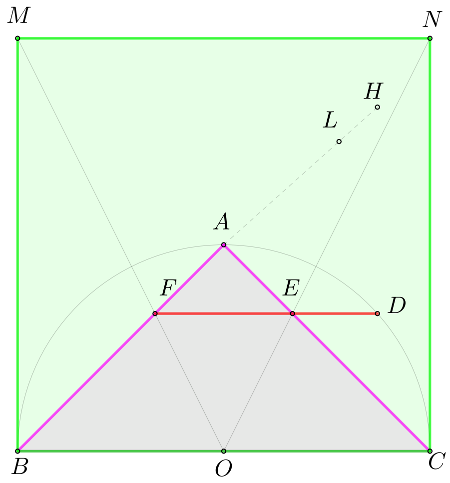
LỜI GIẢI Theo Định lý 1 thì

$$\frac{FD}{FE} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Sử dụng hệ tọa độ Đề-các vuông góc (xem [8]), ta cho các điểm có tọa độ như sau

$$B(0,0), C(2,0), N(2,2), M(0,2), A(1,1).$$

Từ $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = (-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ ta thu được $F\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Tương tự thì $E\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$.



Hình 4. Minh họa cho chứng minh Định lý 2.

Do đó $\overrightarrow{FE}\left(\frac{2}{3},0\right)$. Kết hợp với Tỷ số Vàng từ Tỷ số Vàng $\frac{FD}{FE}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ta thu được

$$\overrightarrow{FD}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{3},0\right)$$

và vì thế nên

$$D\left(\frac{3+\sqrt{5}}{3},\frac{2}{3}\right).$$

Mặt khác, không khó để tính được $MN^2=4$. Đồng thời từ tọa độ của D, ta dễ tính được

$$DM^2=\frac{2(5+\sqrt{5})}{3}, DN^2=\frac{2(5-\sqrt{5})}{3},$$

vì thế nên

$$MN^2+DM^2+DN^2=\frac{32}{3}.$$

Gọi L là điểm Lemoine của tam giác $\triangle DMN$ thì ta có đẳng thức vector (thu được từ tính chất tâm tỷ cự của điểm Lemoine [6]):

$$MN^2.\overrightarrow{LD}+DN^2\cdot\overrightarrow{LM}+DM^2\cdot\overrightarrow{LN}=\overrightarrow{0}.$$

Từ đây ta dễ tính được hoành độ của L là

$$x_L=\frac{MN^2\cdot x_D+DM^2\cdot x_N+DN^2\cdot x_M}{MN^2+DM^2+DN^2}=\frac{\sqrt{5}+4}{4}.$$

Và tương tự với tung độ của L là

$$y_L=\frac{3}{2}.$$

Ta thu được
$$L\left(\frac{\sqrt{5}+4}{4}, \frac{3}{2}\right).$$
Gọi $H\left(\frac{3+\sqrt{5}}{3}, a\right)$ là trực tâm của tam giác $\triangle DMN$. Dễ thấy $DH \perp BC$ nên hoành độ của H và của D bằng nhau. Vậy ta giả sử
$$\overrightarrow{MH} = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{3}, a-2\right).$$
Từ $\overrightarrow{DN} = \left(\frac{3-\sqrt{5}}{3}, \frac{4}{3}\right)$ và $DN \perp MH$, ta thu được $\overrightarrow{DN} \cdot \overrightarrow{MH} = 0$ hay $\frac{4}{9} + \frac{4(a-2)}{3} = 0$. Ta suy ra $a = \frac{5}{3}$. Như vậy ta có tọa độ các điểm
$$A(1,1), L\left(\frac{\sqrt{5}+4}{4}, \frac{3}{2}\right), H\left(\frac{3+\sqrt{5}}{3}, \frac{5}{3}\right).$$
Từ đó ta thấy phương trình tổng quát (xem [8]) của đường thẳng AL là
$$x - \frac{\sqrt{5}}{2}y + \frac{\sqrt{5}-2}{2} = 0.$$
Không khó để thấy tọa độ của H thỏa mãn phương trình tổng quát của đường thẳng AL. Do đó HL đi qua A. Ta kết thúc chứng minh. $\square$

Chú ý. Trong [2] cũng có một lời giải thuần túy hình học cho Định lý 2.

3. Kết luận

Tác giả coi bài viết trong [1] là công trình về hình học đầu tiên được tác giả công bố quốc tế. Tác giả rất tâm đắc với phép dựng Tỷ số Vàng này. Như trong [1] cũng đã nói, phép dựng này đã gợi nhớ lại phép dựng Tỷ số Vàng kinh điển của nghệ sĩ người Mỹ George Phillips Odom Jr, xem [5]. Trên cấu hình này (bao gồm cả phép dựng hình vuông nội tiếp) còn có nhiều bài toán mới và thú vị để khai thác, các bạn có thể tham khảo một vài bài toán như vậy ở trong [3, 4, 7]. Lời cuối cùng, tác giả muốn nói lời cảm ơn chân thành tới Giáo Sư **Paul Yiu** từ đại học Florida Atlantic của Mỹ. Ông như người bạn lớn, người thầy của tác giả, người đã giúp tác giả đặt những viên gạch đầu tiên để đưa những ý tưởng hình học của mình ra thế giới.

Tài liệu

[1] T. Q. Hung, The golden section in the inscribed square of an isosceles right triangle, *Forum Geom.*, **15**(2015), 91–92.

[2] T. Q. Hung, BMoEG–II Mock Geometry Olympiad, *Forum AoPS* (2022), available at https://artofproblemsolving.com/community/c594864t1273694f594864h2948721.

[3] T. Q. Hung, Concurrent lines with a side of a square, *Forum AoPS* (2023), available at https://artofproblemsolving.com/community/c374081h3049737.

[4] T. Q. Hung, Radical axis with the Lester circle, *Forum AoPS* (2023), available at https://artofproblemsolving.com/community/c374081h3051195.

[5] T. Q. Hung and F. V. Lamoen , Odom's Triangle, *Int. J. Comput. Discov. Math.* (2021), 68–77.

[6] Trần Quang Hùng, Đề thi Olympic toán cho học sinh phần hình học, Hội Toán học Việt Nam (VMS) (2023).

[7] Trần Quang Hùng, Ứng dụng của một số định lý hình học kinh điển, Kỷ yếu Trường Đông cho học sinh THPT chuyên, Khoa Toan–Cơ–Tin học ĐHKHTN–ĐHQGHN, Hà Nội 2022.

[8] Trần Nam Dũng (chủ biên), Sách giáo khoa Toán 10 tập 2 (bộ sách chân trời sáng tạo), NXBGD 2023.

ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ ĐA THỨC

Lê Phúc Lữ (ĐH KHTN TPHCM)
Trần Nguyễn Thanh Danh (PTNK TPHCM)

Giới thiệu. *Ta bắt đầu từ câu hỏi: tại sao phần mềm Geogebra có chức năng dựng đường conic đi qua 5 điểm và đồ thị conic sẽ luôn dựng được nếu trong 5 điểm đã xét, không có 3 điểm thẳng hàng? Mong rằng qua bài viết này, bạn đọc có thể tự trả lời được câu hỏi đó.*

1. Các bài toán

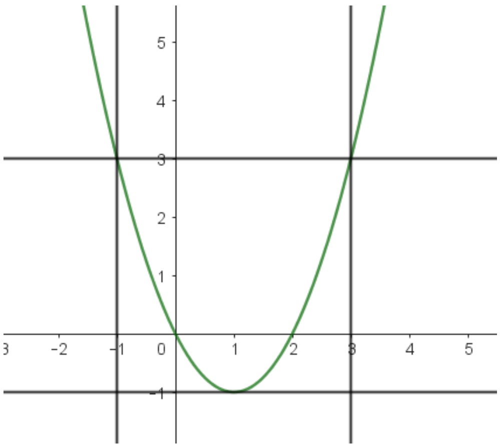
Ta xuất phát từ bài toán nhẹ nhàng như sau:

Bài toán 1 Cho hàm số $f(x) = x^2 - 2x$, tìm điều kiện của tham số m để

$$\underbrace{f(f(\ldots(x)\ldots))}_{2022} = m$$

có 2^{2022} nghiệm thực phân biệt.

Lời giải Ta vẽ đồ thị $\mathcal{C}$ của $f(x)$ như bên dưới và đi biện luận từ $f(x) = m$ (*). Để phương trình này có hai nghiệm phân biệt thì đường thẳng nằm ngang $y = m$ phải cắt đồ thị $\mathcal{C}$ tại hai điểm, dựa vào $\mathcal{C}$ thì dễ thấy $m > -1$. Ta đặt hai nghiệm tương ứng là x_1, x_2.



Lại xét tiếp $f(f(x)) = m$, để phương trình này có $2^2 = 4$ nghiệm thì trước đó, $(*)$ phải có 2 nghiệm phân biệt, đặt là x_1, x_2 như trên. Ta viết lại

$$f(f(x)) = m \Leftrightarrow (f(x) - x_1)(f(x) - x_2) = 0.$$

Mỗi phương trình $f(x) - x_i = 0$, $\forall i = 1, 2$ lại phải có 2 nghiệm phân biệt nên ta coi các số x_i này có vai trò như tham số m ở trên và điều kiện cho các số này là $x_i > -1$. Tiếp tục dựa vào đồ thị, ta thấy $(*)$ có hai nghiệm phân biệt $x_i > -1$ khi $-1 < m < 3$.

Nếu xét tiếp $f(f(f(x))) = m$ có $2^3 = 8$ nghiệm thì tương tự trên, cần tìm m để $(*)$ có hai nghiệm x_i phân biệt thỏa mãn $-1 < x_i < 3$. Đây là điểm mấu chốt của bài toán, ta quan sát đồ thị và thấy rằng, đường thẳng $y = 3$ cắt $\mathcal{C}$ tại $(-1; 3)$ và $(3; 3)$. Vì thế với điều kiện $-1 < m < 3$ thì $(*)$ cũng sẽ có hai nghiệm phân biệt x_i cũng thỏa mãn $-1 < x_i < 3$. Với sự "may mắn" này, điều kiện cho các phương trình chứa hàm hợp nhiều lần hơn sẽ không thay đổi. Vì thế nên để

$$\underbrace{f(f(\ldots(x)\ldots))}_{k} = m, \ k \geq 3$$

có 2^k nghiệm phân biệt thì điều kiện là $-1 < m < 3$. $\square$

Có một câu hỏi đặt ra là với điều kiện nào của a, b, c thì tam thức $ax^2 + bx + c$ có đặc điểm tương tự trên? Tiếp theo, ta xét một bài toán khác cũng rất thú vị về tam thức bậc hai.

Bài toán 2 Cho tam thức bậc hai hệ số thực $f(x) = ax^2 + bx + c$ với $a \neq 0$.

1. Biết rằng $f(f(x)) = x$ có nghiệm thực duy nhất $x = x_0$. Tính giá trị của $f'(x_0)$.

2. Giả sử rằng đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $x = f(y)$ cắt nhau tại bốn điểm phân biệt tạo thành tứ giác $ABCD$. Chứng minh rằng $AC \perp BD$ và $ABCD$ không phải là hình thang.

Lời giải

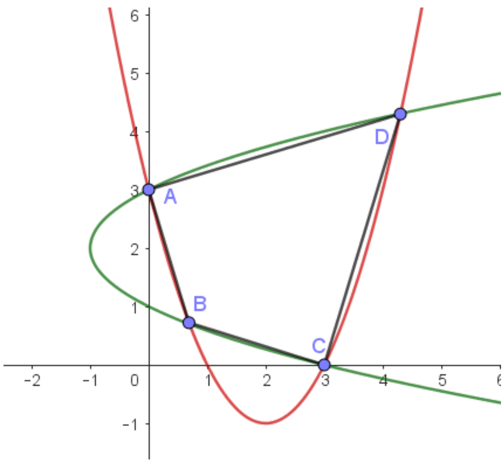
1) Dưới đây, ta xét ba cách giải cho bài toán này:

Cách 1. Theo đề bài, $f(x) = x$ phải có nghiệm duy nhất vì:

- Nếu $f(x) = x$ vô nghiệm thì phải có $f(x) > x, \ \forall x$ hoặc $f(x) < x, \ \forall x$. Trường hợp thứ nhất sẽ kéo theo $f(f(x)) > f(x) > x, \ \forall x$ dẫn đến phương trình ban đầu vô nghiệm. Trường hợp sau cũng tương tự.

- Nếu $f(x) = x$ có 2 nghiệm phân biệt là x_1, x_2 thì $f(f(x_1)) = f(x_1) = x_1$ và $f(f(x_2)) = x_2$ nên $f(f(x)) = x$ có ít nhất hai nghiệm, cũng không thỏa mãn.

Do đó, $f(x) = x$ có nghiệm duy nhất, tức là nghiệm kép, cũng chính là nghiệm x_0 ban đầu. Suy ra $f(x) - x = a(x - x_0)^2$. Đạo hàm hai vế được $f'(x) - 1 = 2a(x - x_0)$ nên có ngay $f'(x_0) = 1$.



Cách 2. Ta có kết quả tổng quát hơn: nếu đa thức $P(x)$ bậc chẵn có nghiệm duy nhất x_0 thì đó cũng là nghiệm của $P'(x)$. Thật vậy, theo định lý Bezout

thì $P(x) = (x - x_0)Q(x)$ với $Q(x)$ là đa thức bậc lẻ. Khi đó, $Q(x)$ phải còn nghiệm nữa, và nghiệm đó phải trùng với x_0 nên ta đặt tiếp $P(x) = (x - x_0)^2 H(x)$. Từ đây đạo hàm hai vế được

$$P'(x) = (x - x_0)^2 H'(x) + 2(x - x_0)H(x)$$

nên tiếp tục có nghiệm $x = x_0$.

CÁCH 3. Gọi (C) là đồ thị của $y = f(x)$ và ta chia nó làm hai phần $(C_1), (C_2)$ lần lượt nằm bên trái – phải của trục đối xứng. Khi đó, đồ thị (C') của $x = f(y)$ sẽ gồm hai phần $(C'_1), (C'_2)$ lần lượt là đối xứng của $(C_1), (C_2)$ qua đường thẳng $(d) : y = x$.

Để $f(f(x)) = x$ có nghiệm duy nhất thì $(C), (C')$ phải tiếp xúc nhau tại một điểm I nào đó. Do tính đối xứng trục thì $I \in (d)$ nên (d) là tiếp tuyến chung của $(C), (C')$. Cuối cùng, ta biết rằng để tìm hệ số góc của tiếp tuyến, ta xét đạo hàm tại điểm đó, vì thế nên $f'(x_0)$ chính là hệ số góc của tiếp tuyến (d), cũng chính là 1.

2) Không mất tính tổng quát, ta giả sử $a > 0$. Ta biểu diễn như hình vẽ bên dưới, trong đó

$$A = (C_1) \cap (C'_2),\ B = (C_1) \cap (C'_1),\ C = (C_2) \cap (C'_1),\ D = (C_2) \cap (C'_2).$$

Khi đó, do tính đối xứng trục (d) thì A, C đối xứng nhau qua (d) nên $AC \perp d$. Ngoài ra, cũng có $B, D \in d$ nên ta có ngay $AC \perp BD$. Tiếp theo, vì $A, B \in (C_1)$ là nhánh nghịch biến của đồ thị nên hệ số góc của AB là âm; tương tự hệ số góc của CD là dương nên AB, CD không thể song song nhau. Do BC, AD đối xứng với AB, CD qua trục (d) nên hai đường này cũng không song song.

Vậy ta luôn có $AC \perp BD$ và tứ giác $ABCD$ này không phải là hình thang. $\square$

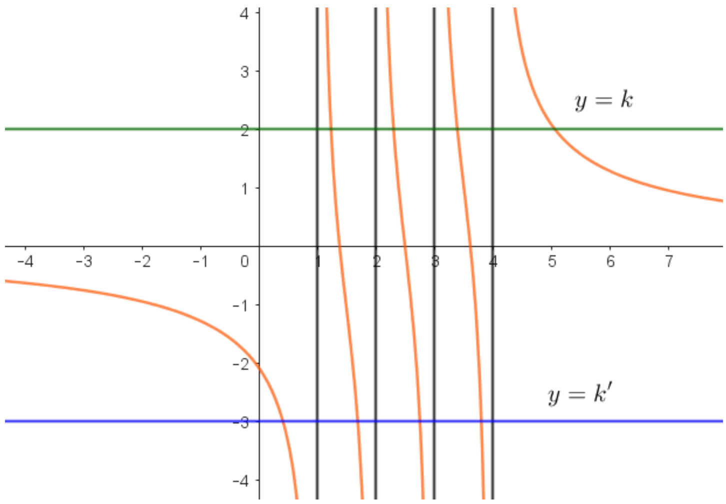
Bài toán tiếp theo được tổng quát từ đề thi IMO Shortlist cách đây nhiều năm. Vai trò của đồ thị trong bài toán này là khá nhiều, tuy đó không phải là đồ thị của đa thức mà là phân thức.

Bài toán 3 Cho đa thức hệ số thực $P(x)$ bậc $n \geq 2$ có n nghiệm thực phân biệt $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$.Với số $k > 0$ cho trước, gọi D là tổng độ dài khoảng nghiệm của $\frac{P'(x)}{P(x)} \geq k$. Chứng minh $D = \frac{n}{k}$.

LỜI GIẢI Theo định lý Bezout thì ta có thể viết $P(x) = a(x - a_1)(x - a_2)\cdots(x - a_n)$, khi đó

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \frac{1}{x - a_1} + \frac{1}{x - a_2} + \cdots + \frac{1}{x - a_n},$$

đặt là $f(x)$. Ta quy về xét bất phương trình $f(x) \geq k$. Ta có $f'(x) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(x-a_i)^2} < 0$ nên hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định. Ta có thể vẽ bảng biến thiên hoặc đồ thị của hàm số như hình bên dưới:



Không mất tính tổng quát, giả sử $k > 0$ (trường hợp $k < 0$ thực hiện tương tự). Khi đó, trên mỗi khoảng $(a_i, a_{i+1}), i = 1, 2, \ldots, n-1$ và $(a_n; +\infty)$ thì $f(x) = k$ có đúng một nghiệm. Đặt các nghiệm đó theo thứ tự là $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Khi đó, các khoảng nghiệm là (a_i, b_i) với $1 \leq i \leq n$ và tổng độ dài các khoảng nghiệm là

$$D = \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) = \sum_{i=1}^{n} b_i - \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Các nghiệm $b_i,\ 1 \leq i \leq n$ ở trên cũng đều là nghiệm của

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = k \Leftrightarrow kP(x) - P'(x) = 0.$$

Đặt $P(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$ thì

$$P'(x) = c_n n x^{n-1} + c_{n-1}(n-1)x^{n-2} + \cdots + c_1$$

thay vào

$$c_n n \cdot x^{n-1} + c_{n-1}(n-1)x^{n-2} + \cdots + c_1 = k(c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0)$$

hay

$$kc_n x^n + (kc_{n-1} - c_n n)x^{n-1} + \cdots + (kc_1 - 2c_2)x + kc_0 = 0.$$

Theo định lý Viete thì

$$\begin{aligned} b_1 + b_2 + \cdots + b_n &= -\frac{kc_{n-1} - c_n n}{kc_n} \\ &= \frac{n}{k} - \frac{c_{n-1}}{c_n} = \frac{n}{k} + (a_1 + a_2 + \cdots + a_n). \end{aligned}$$

Từ đó ta có ngay $D = \frac{n}{k}$. $\square$

Tiếp theo, ta xét bài toán rất thú vị trong đề kiểm tra trường Đông 2022

Bài toán 4 (trường Đông Vinh 2022) Với n nguyên dương, xét đa thức hệ số thực $P(x)$ bậc n,monic sao cho tồn tại các số thực r, s, t phân biệt có tổng là -2023 thỏa mãn $P(k) \in \{r, s, t\}$ với mọi $k = 1, 2, 3, \dots, 3n-1, 3n$.

1. Với $n = 2$, tìm tất cả các đa thức $P(x)$ thỏa mãn đề bài.

2. Hỏi có tồn tại hay không số $n \geq 3$ để có đa thức $P(x)$ thỏa mãn đề bài? Vì sao?

LỜI GIẢI 1) Ứng với $n = 2$, ta có $P(k) \in \{r, s, t\}$ với $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Do $\deg P = 2$ nên có không quá 2 số k để $P(k) = r$. Tương tự với $P(k) = s,\ P(k) = t$. Từ đó suy ra mỗi phương trình trên phải có đúng 2 nghiệm. Chú ý rằng cả ba phương trình đều có chung hệ số x^2 và x nên tổng các nghiệm của các phương trình là bằng nhau. Mặt khác, tất cả các nghiệm của chúng là $1, 2, 3, 4, 5, 6$ có tổng bằng 21, từ đó suy ra mỗi phương trình sẽ có tổng các nghiệm là 7. Khi đó, 6 nghiệm ở trên sẽ chia ra các cặp $(1, 6), (2, 5), (3, 4)$. Ta có thể giả sử

$$\begin{cases} P(x) - r = (x-1)(x-6) \\ P(x) - s = (x-2)(x-5) \\ P(x) - t = (x-3)(x-4) \end{cases},$$

từ đó suy ra

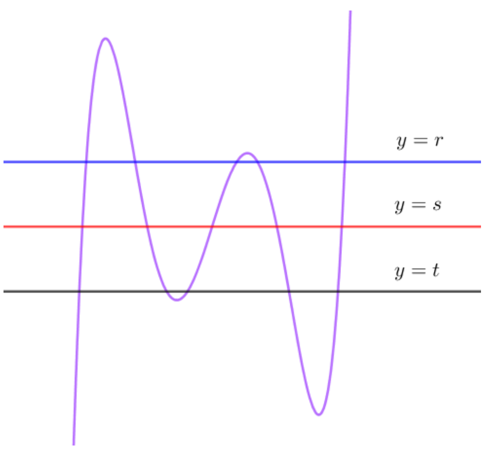
$$3P(x) - (r + s + t) = (x-1)(x-6) + (x-2)(x-5) + (x-3)(x-4)$$

hay $3P(x) + 2023 = 3x^2 - 21x + 28$. Từ đó tìm được $P(x) = x^2 - 7x - 665$ và r, s, t lần lượt là $-671, -675, -677$.

2) Giả sử tồn tại $P(x)$ bậc $n \geq 3$ thỏa mãn đề bài, không mất tính tổng quát giả sử $r < s < t$. Theo lập luận ở trên, mỗi phương trình

$$P(x) - r,\ P(x) - s,\ P(x) - t$$

sẽ có đúng n nghiệm phân biệt lấy từ $\{1, 2, 3, \dots, 3n\}$. Ngoài ra, theo định lý Viete, do mỗi phương trình đều chung nhau ít nhất là ba hệ số đầu tiên tổng các nghiệm và tổng bình phương các nghiệm của chúng phải đều bằng nhau.



Xét hàm số $f(x) = P(x) - r$ có n nghiệm phân biệt nên theo định lý Rolle thì $f'(x) = P'(x)$ phải có $n-1$ nghiệm phân biệt, ký hiệu là

$$c_1 < c_2 < \ldots < c_{n-1}.$$

Phương trình $P(x) = r$ sẽ có nghiệm duy nhất trên từng khoảng $(-\infty; c_1), (c_1, c_2), \ldots, (c_{n-1}, +\infty)$. Tương tự với $P(x) = s,\ P(x) = t$. Ta có hai trường hợp sau

A) Nếu n lẻ thì dễ thấy ở khoảng đầu tiên, $P(x)$ đồng biến nên $P(x) = r,\ P(x) = s,\ P(x) = t$ sẽ lần lượt nhận các nghiệm $1, 2, 3$. Ở khoảng tiếp theo, hàm số nghịch biến nên chúng sẽ lần lượt nhận các nghiệm $6, 5, 4$, và cứ như thế, đến khoảng cuối cùng sẽ là $3n-2, 3n-1, 3n$.

Khi đó, dễ thấy tổng các nghiệm của ba phương trình trong $n-1$ khoảng đầu là bằng nhau, riêng khoảng cuối thì mỗi phương trình nhận một nghiệm khác nhau nên tổng các nghiệm của chúng là khác nhau, không thỏa mãn.

B) Nếu n chẵn, đặt $n = 2m$ thì ba phương trình sẽ có các nghiệm là $1, 2, 3, \ldots, 6m$ và tương tự lập luận trên, $P(x) = r$ sẽ có các nghiệm là $\{1, 6, 7, 12, \ldots, 6m-5, 6m\}$. Tổng bình phương các số này sẽ là

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{m} (6k-5)^2 + (6k)^2 = \sum_{k=1}^{m} (72k^2 - 60k + 25) \\
&= 72 \cdot \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} - 60 \cdot \frac{m(m+1)}{2} + 25m \\
&= 12m(m+1)(2m+1) - 30m(m+1) + 25m = m(24m^2 + 6m + 7).
\end{aligned}$$

Mặt khác, tổng bình phương tất cả $6m$ số là

$$\frac{6m(6m+1)(12m+1)}{6} = m(6m+1)(12m+1)$$

nên mỗi phương trình phải có tổng bình phương các nghiệm là $\frac{1}{3}$ giá trị này. Suy ra

$$3m(24m^2 + 6m + 7) = m(6m+1)(12m+1)$$

hay $72m^2 + 18m + 21 = 72m^2 + 18m + 1$, vô lý. Điều này cho thấy trong mọi trường hợp, ta không thể có đa thức $P(x)$ thỏa mãn đề bài. $\square$

Bài toán trên có thể nói là kết hợp của các bài toán sau đây:

- Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ bậc ba monic sao cho

$$|P(1)| = |P(2)| = |P(3)| = |P(5)| = |P(6)| = |P(7)|.$$

- Xét các số nguyên dương m, n và giả sử tồn tại $P(x)$ hệ số nguyên:

$$P(x_1) = \cdots = P(x_m) = 61 \text{ và } P(y_1) = \cdots = P(y_n) = 2020,$$

  với $x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_n$ là các số nguyên đôi một phân biệt. Tìm giá trị lớn nhất của mn.

- Tìm tất cả các đa thức $P(x), Q(x)$ hệ số nguyên sao cho

$$P(Q(x)) = (x-1)(x-2)\cdots(x-9)$$

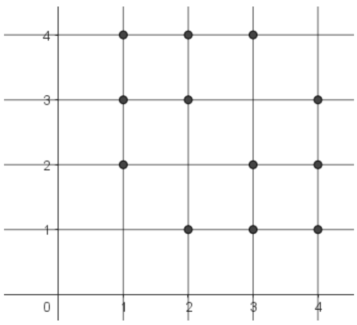
với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Ở câu b) của bài toán, việc dùng đồ thị để minh họa rõ thứ tự sắp xếp của các nghiệm là rất quan trọng, giúp ta có thể chỉ rõ được các nghiệm ban đầu được phân hoạch ra như thế nào và từ đó dùng định lý Bezout, Viete.

Bài toán 5 (Arab Saudi TST 2015) Cho tập hợp $S = \{(a,b) | a \neq b, 1 \leq a \leq 4, 1 \leq b \leq 4\}$ là các cặp số nguyên. Xét đa thức hai biến $f(x,y)$ hệ số nguyên sao cho $f(a,b) = 0,\ \forall (a,b) \in S$.

1. Tìm giá trị nhỏ nhất của bậc của đa thức này.
2. Giả sử $f_0(x,y)$ là một đa thức có bậc nhỏ nhất. Chứng minh rằng $f_0\left(\frac{3}{2}; \frac{5+\sqrt{6}}{2}\right) = 0$.

Lời giải: Bài toán này có nét tương tự đa thức nguyên tối tiểu, nếu lập luận theo hướng đại số trực tiếp thì vẫn được nhưng khá rắc rối. Trong phần này, ta sẽ biểu diễn các điểm lên mặt phẳng tọa độ, quy việc tìm đa thức về việc xác định đồ thị đi qua được tất cả các điểm này.



Trước hết, ta thấy rằng nếu chỉ dùng đường thẳng thì cần ít nhất 4 đường mới đi qua hết 12 điểm này, nếu chỉ có $1, 2$, hoặc 3 đường thì không đủ. Ta xét các trường hợp sau:

1. Nếu $\deg f(x,y) = 1$ thì ta có đường thẳng dạng $ax + by + c = 0$ nên không thỏa mãn.
2. Nếu $\deg f(x,y) = 2$ thì loại trường hợp tích của hai đa thức bậc nhất, nếu đây là đa thức bậc hai thì phương trình sẽ có dạng

$$f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + g.$$

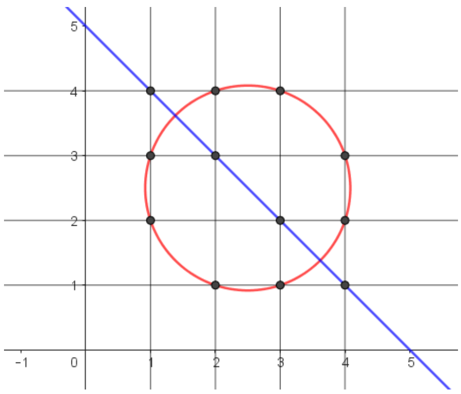
Ta sẽ chứng minh conic dạng này sẽ không đi qua ba điểm thẳng hàng. Giả sử rằng nó đi qua được ba điểm P, Q, R cùng thuộc đường thẳng $mx + ny + p = 0$. Giả sử $m \neq 0$, ta coi đây là đa thức bậc nhất theo x

và coi $f(x, y)$ là đa thức bậc hai theo biến x thì thực hiện phép chia

$$f(x, y) = (mx + ny + p)g(x, y) + Ay^2 + By + C$$

Vì $f(x_P, y_P) = f(x_Q, y_Q) = f(x_R, y_R) = 0$ nên y_P, y_Q, y_R là ba nghiệm phân biệt của $Ay^2 + By + C$ nên rõ ràng phải có $A = B = C = 0$.Điều này kéo theo $f(x, y)$ có thể phân tích thành tích của hai hàm số bậc nhất theo biến x, y, không thể là đường conic không suy biến được. Trở lại bài toán, ta thấy trong 12 điểm đã cho, có nhiều bộ ba điểm thẳng hàng nên không thể có conic không suy biến cùng lúc đi qua tất cả các điểm đó.

3. Nếu $\deg f(x, y) = 3$, ta chỉ xét trường hợp một đường thẳng và một conic bậc hai. Quan sát đồ thị, ta thấy rằng: đường thẳng qua được tối đa 4 điểm; còn theo phần (2) ở trên thì ở mỗi tung độ $y = 1, 2, 3, 4$, đường conic sẽ qua tối đa 2 điểm nên tổng cộng qua được tối đa 8 điểm. Do đó, tổng cộng đồ thị qua tối đa 12 điểm và dấu bằng phải xảy ra. Ta vẽ được duy nhất mô hình gồm một đường thẳng và một đường tròn như bên dưới:



Khi đó ta có được $f_0(x, y) = k(x + y - 5)(x^2 + y^2 - 5x - 5y + 10)$ và có ngay $f\left(\frac{3}{2}; \frac{5+\sqrt{6}}{2}\right) = 0$. □

Cuối cùng, ta xét hai bài toán rất thú vị về ý nghĩa hình học của các bài toán về đa thức, bài đầu tiên trong đề chọn đội tuyển của Iran, còn bài sau chúng tôi tương tự hóa lại từ bài này.

Bài toán 6 Cho $P(x)$ là đa thức hệ số thực khác hằng thỏa mãn: tồn tại vô số cặp số nguyên m, n sao cho $P(m) + P(n) = 0$. Chứng minh rằng đồ thị của hàm số $y = P(x)$ có tâm đối xứng.

Lời giải Ta biết rằng $P(x)$ có tâm đối xứng là (x_0, y_0) nếu như

$$P(x + x_0) + P(-x + x_0) = 2y_0$$

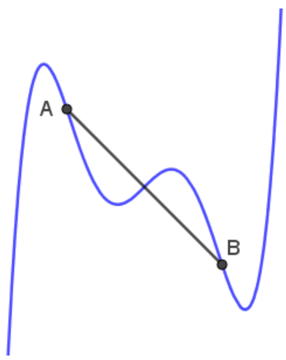
với mọi $x \in \mathbb{R}$. Nói cách khác, nếu đặt $Q(x) = P(x + x_0) - y_0$ thì $Q(x) +$

$Q(-x) = 0$ hay Q là hàm số lẻ. Như thế, mấu chốt của bài toán này là chỉ ra trong vô số cặp số nguyên đã cho, phải có vô số cặp số nguyên có tổng là hằng số nào đó.

Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử rằng $P(x)$ monic, vì nếu $P(x)$ thỏa mãn thì $P(x)/c$ cũng thỏa mãn.

Nếu như $\deg P(x)$ chẵn thì với x có giá trị tuyệt đối đủ lớn, $P(x) > 0$. Cụ thể là tồn tại các số thực p, q sao cho $p < 0 < q$ mà $P(x) > 0, \forall x \notin [p; q]$. Xét $S = \{s \in \mathbb{Z} | s \in [p; q]\}$ thì rõ ràng S hữu hạn. Xét cặp số nguyên (m, n) sao cho $P(m) + P(n) = 0$ thì giả sử $P(n) \leq 0$, kéo theo $n \in S$.Như thế, với mọi cặp số nguyên (m, n) thỏa mãn đề bài thì có ít nhất một số sẽ thuộc S. Vì tính hữu hạn của S nên phải có một số $s_0 \in S$ ứng với vô số cặp (m, s_0) mà $P(m) = -P(s_0)$, kéo theo $P(x)$ là đa thức hằng, không thỏa mãn. Như vậy, $\deg P(x)$ lẻ.

Bây giờ chú ý rằng kể từ một số x đủ lớn nào đó thì $P(x)$ đơn điệu tăng khi $x \to +\infty$ (ta chỉ cần chọn x lớn hơn điểm cực trị lớn nhất của $P(x)$ là xong). Hơn nữa, với mỗi số nguyên n, tồn tại hữu hạn các số nguyên m sao cho $P(m) = -P(n)$ (vì đa thức chỉ có thể nhận một giá trị nào đó ở hữu hạn điểm, không vượt quá bậc của nó).



Từ đó, ta thấy rằng với mọi số thực C đủ lớn, tồn tại cặp số $m, n \in \mathbb{Z}$ sao cho $P(m) + P(n) = 0$, trong đó m và n khác dấu và có trị tuyệt đối lớn hơn C. $(*)$ Giả sử rằng $\deg P(x) = k$ lẻ và đặt $P(x) = x^k + ax^{k-1} + H(x)$ với $\deg H < k - 1$. Tiếp theo, dễ dàng chọn được số thực d sao cho $P(x - d)$ khuyết hệ số của bậc $k - 1$. Thật vậy,

$$P(x-d) = (x - d)^k + a(x - d)^{k-1} + H(x-d) = x^k - kdx^{k-1} + ax^{k-1} + H(x-d)$$

và như thế, ta chỉ cần chọn $d = \frac{a}{k}$. Bây giờ ta chứng minh rằng điểm $(d; 0)$ chính là tâm đối xứng của đồ thị hàm số $y = P(x)$. Đặt $P(x - d) = Q(x)$, ta quy về chứng minh rằng

$$Q(x) = -Q(-x), \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Như thế, $Q(x) = x^k + bx^{k-2} + H(x - d)$ và tồn tại vô hạn cặp số m, n sao cho $Q(m) + Q(n) = 0$ và $m - d, n - d$ là số nguyên. Theo $(*)$, ta chọn nghiệm có giá trị tuyệt đối đủ lớn với $m > 0, n < 0$. Bây giờ giả sử $|m| < |n|$, giả sử

$n = -m - c$ với $c \in \mathbb{Z}^+$. Khi đó

$$\begin{aligned} Q(m) + Q(n) &= Q(m) + Q(-m-c) \\ &= m^k + bm^{k-2} + H(m) + (-m-c)^k + b(-m-c)^{k-2} + H(-m-c) \\ &= -kc \cdot m^{k-1} + R(m), \end{aligned}$$

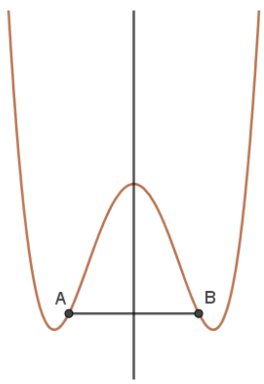
trong đó $\deg R(x) \leq k-2$. Nếu m đủ lớn, số $kc \cdot m^{k-1}$ sẽ lớn hơn nhiều so với $|R(m)|$ và như vậy tổng $-kc \cdot m^{k-1} + R(m)$ sẽ nhỏ hơn 0. Tương tự, không thể có $|m| > |n|$ với $|m|, |n|$ đủ lớn. Do đó, tồn tại vô số các số m sao cho $Q(m) + Q(-m) = 0$, tức là đa thức $Q(x) + Q(-x)$ có vô số nghiệm. Điều này có thể xảy ra khi $Q(x) + Q(-x) = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$ và như thế, đa thức $Q(x)$ là hàm số lẻ và có đồ thị đối xứng qua điểm $(0; 0)$.

Vậy đồ thị $y = P(x)$ đối xứng qua điểm $(d; 0)$. □

Bài toán 7 Cho $P(x)$ là đa thức hệ số thực khác hằng thỏa mãn: tồn tại vô số cặp số nguyên $m \neq n$ sao cho $P(m) = P(n)$. Chứng minh rằng đồ thị của hàm số $y = P(x)$ có trục đối xứng.

Lời giải. Bài toán này nói chung giống bài trên, trong lời giải, ta chỉ cần đổi dấu cho $P(x)$ tại một số vị trí thích hợp. Ta biết rằng $P(x)$ có trục đối xứng là $x = x_0$ nếu như $P(x + x_0) = P(-x + x_0)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Nói cách khác, nếu đặt $Q(x) = P(x + x_0)$ thì $Q(x) = Q(-x)$ hay Q là hàm số chẵn. Không mất tính tổng quát, ta cũng giả sử $P(x)$ monic.

Nếu $\deg P(x)$ lẻ thì rõ ràng $\lim\limits_{x \to -\infty} P(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} P(x) = +\infty$. Như thế, có thể chọn x_0 đủ lớn thì $P(x)$ sẽ đồng biến trên $(x_0; +\infty)$ và $P(x) = y_0$ luôn có nghiệm duy nhất với mọi $y_0 > P(x_0)$. Do đó, không thể tồn tại cặp số $m \neq n$ như đề bài. Do đó $\deg P(x)$ chẵn.



Xét $\deg P(x)$ chẵn thì tương tự trên, với mọi số thực C đủ lớn, tồn tại cặp số $m, n \in \mathbb{Z}$ sao cho $P(m) = P(n)$ trong đó m và n khác dấu và có trị tuyệt đối lớn hơn C. $(*)$

Đặt $P(x) = x^k + ax^{k-1} + H(x)$ với k chẵn, $\deg H < k - 1$. Chọn d để $P(x - d)$ khuyết bậc $k - 1$. Ta chứng minh rằng đường thẳng $x = d$ chính là trục đối xứng của đồ thị hàm số $y = P(x)$.

Đặt $P(x-d) = Q(x)$ thì $Q(x) = x^k + bx^{k-2} + H(x-d)$ và tồn tại vô hạn m, n sao cho $Q(m) = Q(n)$ và $m-d, n-d$ đều nguyên. Theo $(*)$, ta chọn nghiệm có giá trị tuyệt đối đủ lớn với $m > 0, n < 0$. Ta cũng sẽ đi chứng minh $m = -n$. Bây giờ giả sử $|m| < |n|$, giả sử $n = -m - c$ với $c \in \mathbb{Z}^+$. Khi đó

$$\begin{aligned}
&Q(m) - Q(n) = Q(m) - Q(-m-c) \\
&= m^k + bm^{k-2} + H(m) - (-m-c)^k - b(-m-c)^{k-2} - H(-m-c) \\
&= -kc \cdot m^{k-1} + R(m),
\end{aligned}$$

trong đó $\deg R(x) \leq k-2$. Đến đây sẽ có vô lý. Tương tự nếu $|m| > |n|$ cũng có vô lý, và vì thế nên $m+n = 0$. Vậy nên $Q(x) = Q(-x)$ với vô số x nguyên, kéo theo $Q(x) = Q(-x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ nên $Q(x)$ có trục đối xứng là $x = 0$, và $P(x)$ có trục đối xứng là đường thẳng $x = d$. □

2. Bài tập rèn luyện.

Bài toán 8 (VMO 2018)**.** *Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $\mathcal{C}$ là độ thị của hàm số $y = \sqrt[3]{x^2}$. Một đường thẳng (d) thay đổi và cắt $\mathcal{C}$ tại ba điểm có hoành độ phân biệt lần lượt là x_1, x_2, x_3.*

1. *Chứng minh rằng đại lượng*

$$\sqrt[3]{\frac{x_1x_2}{x_3^2}} + \sqrt[3]{\frac{x_2x_3}{x_1^2}} + \sqrt[3]{\frac{x_3x_1}{x_2^2}}$$

   là hằng số.

2. *Chứng minh rằng* $\sqrt[3]{\frac{x_1^2}{x_2x_3}} + \sqrt[3]{\frac{x_2^2}{x_3x_1}} + \sqrt[3]{\frac{x_3^2}{x_1x_2}} < -\frac{15}{4}$.

Bài toán 9 (Bài toán friendly circles)**.** *Cho các số thực a, b, c đôi một phân biệt và khác 0. Chứng minh rằng ba đường tròn sau khi vẽ trong mặt phẳng tọa độ Oxy thì luôn có ít nhất hai điểm chung*

$$\begin{aligned}
(x-a)^2 + (y-b)^2 &= c^2 \\
(x-b)^2 + (y-c)^2 &= a^2 \\
(x-c)^2 + (y-a)^2 &= b^2
\end{aligned}$$

(điểm chung được hiểu là giao điểm của ít nhất hai trong ba đường tròn trên).

Bài toán 10 (AIME 2022). *Cho a, b, x, y là các số thực (trong đó $a > 4, b > 1$) thỏa mãn*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - 16} = \frac{(x-20)^2}{b^2 - 1} + \frac{(y-11)^2}{b^2} = 1.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $T = a + b$.

Bài toán 11 (Đề THPT QG 2019). *Tìm điều kiện của m để phương trình sau có bốn nghiệm phân biệt*

$$\frac{x-2}{x-1} + \frac{x-1}{x} + \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} = |x+1| - x - m.$$

Tài liệu

[1] Nguyễn Mạc Nam Trung, Tài liệu chọn lọc trường Đông Toán học miền Nam, 2020.

[2] IMO Booklet của Arab Saudi 2015.

[3] Phùng Hồ Hải, Bài giảng ở Trường Đông Titan miền Nam, 2022.

[4] https://mathscope.org/showthread.php?t=35623.

[5] https://artofproblemsolving.com/community/c5h2782937p24447217.

[6] https://en.wikipedia.org/wiki/Five_points_determine_a_conic.

Bài Toán Xây Dựng Đa Thức

Đào Xuân Luyện
Trường THPT chuyên Lê Quý Đôn, Bình Định

Các bài toán liên quan đến đa thức thường xuất hiện trong các đề thi học sinh giỏi các cấp, thi chọn đội tuyển học sinh thi học sinh giỏi quốc gia của các tỉnh thành trong cả nước, thi olympic các cấp và thi học sinh giỏi quốc gia cũng như trong cuộc thi IMO. Trong quá trình giảng dạy, tác giả đã biên soạn tài liệu để giảng dạy, có bổ sung và sáng tác thêm. Các tài liệu tham khảo về vấn đề hiện nay đã có nhưng chưa hình thành nên một chủ đề trong giải một số dạng toán về đa thức. Nhằm trang bị thêm tài liệu giảng dạy và giúp cho các bạn đồng nghiệp, các học sinh chuẩn bị thi học sinh giỏi và những ai quan tâm đến vấn đề tham khảo, tác giả viết chủ đề "*Bài toán xây dựng đa thức*" nhằm giúp học sinh trực tiếp giảng dạy và các đồng nghiệp có nguồn để tham khảo và những người đọc quan tâm đến vấn đề hiểu tốt hơn và có cái nhìn tốt hơn về lý thuyết về đa thức cũng như ứng dụng nó.

1. Một số kết quả thường sử dụng trong bài viết

Ngoài phần lý thuyết cơ bản về đa thức như định nghĩa, các khái niệm như bậc, nghiệm, định lý Viet, định lý Bezout, định lý cơ bản của đại số, tính liên tục, tính khả vi,... ở đây bổ sung thêm một số kết quả sau.

Định lý 1 Giả sử A là một trường, $\alpha \in A, f(x) \in A[x]$. Dư của phép chia $f(x)$ cho là $f(\alpha)$.

Định lý 2 Ta có α là nghiệm của $f(x)$ khi và chỉ khi $f(x)$ chia hết cho $(x-\alpha)$.

Giả sử A là một trường, $\alpha \in A, f(x) \in A[x]$ và m là một số tự nhiên lớn hơn hoặc bằng 1, α là nghiệm bội cấp m của $f(x)$ nếu và chỉ nếu $f(x)$ chia hết cho $(x-\alpha)^m$ và $f(x)$ không chia hết cho $(x-\alpha)^{m+1}$. Trong trường hợp $m=1$ người ta còn gọi α là nghiệm đơn, $m=2$, α gọi là nghiệm kép.

Người ta coi một đa thức có một nghiệm bội cấp m như một đa thức có m nghiệm trùng nhau.

Định lý 3 (Định lí Viette)

(a) Với $a_n \neq 0$, giả sử phương trình

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \tag{1}$$

có n nghiệm $x_1, x_2, \ldots, x_n$ thì

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_n = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n = \dfrac{a_{n-2}}{a_n} \\ \ldots \\ x_1x_2\cdots x_n = (-1)^n \dfrac{a_0}{a_n} \end{cases} \tag{2}$$

(b) Ngược lại nếu các số $x_1, x_2, \ldots, x_n$ thoả mãn hệ trên thì chúng là nghiệm của phương trình (1).

Hệ (2) có n thành phần và ở vế trái của thành phần thứ k có C_k^n số hạng.

Định lý 4 Một đa thức bậc n có không quá n nghiệm.

Đa thức có vô số nghiệm là đa thức không.

Nếu đa thức có bậc $\leq n$ mà nhận giá trị bằng nhau tại $n+1$ giá trị khác nhau của đối số thì đa thức đó là đa thức hằng.

Hai đa thức bậc $\leq n$ mà nhận $n+1$ giá trị bằng nhau tại $n+1$ giá trị khác nhau của đối số thì đồng nhất bằng nhau.

Định lý 5 Mọi đa thức $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ bậc n có đúng n nghiệm (tính cả bậc của nghiệm).

Định lý 6 Mọi đa thức $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ có bậc n và có hệ số chính (hệ tử cao nhất) $a_n \neq 0$ đều có thể phân tích duy nhất thành nhân tử

$$f(x) = a_n \prod_{i=1}^{m} (x - \alpha_i) \prod_{k=1}^{l} \left(x^2 + b_k x + c_k\right),$$

với $\alpha_i, b_k, c_k \in$, $l, m, n \in {}^*$ thỏa mãn $n = m + 2l$ và $b_k^2 - 4c_k < 0$.

2. Một số bài toán

Sau đây là một số bài toán sử dụng cách xây dựng đa thức để giải:

Bài toán 1. *Có tồn tại hay không một đa thức $P(x)$ bậc 2023 sao cho $P(x^2-2022)$ chia hết cho $P(x)$.*

Phân tích: Các bài toán về tồn tại đa thức thường hay xây dựng đa thức để thỏa mãn. Một trong những dạng đa thức thường hay sử dụng là đa thức dạng lũy thừa của một nhị thức bậc nhất. Trong bài này, chúng ta cũng xây dựng theo hướng đó, cụ thể là xây dựng đa thức có dạng $P(x) = (x+a)^{2023}$.

Lời giải. Xét đa thức $P(x) = (x+a)^{2023}$, khi đó

$$P(x^2 - 2022) = (x^2 - 2022 + a)^{2023} = \left[(x+a)^2 - 2a(x+a) + a^2 + a - 2022\right]^{2023}.$$

Nếu chọn được a sao cho $a^2 + a - 2022 = 0$, tức

$$a = \frac{-1+\sqrt{8089}}{2} \vee a = \frac{-1-\sqrt{8089}}{2}.$$

thì $P(x^2-2022) = (x^2-a^2)^{2023} = (x+a)^{2023}(x-a)^{2023}$ chia hết cho $P(x)$. Vậy

$$P(x) = \left(x + \frac{-1+\sqrt{8089}}{2}\right)^{2023}, \quad \text{hoặc} \quad P(x) = \left(x + \frac{-1-\sqrt{8089}}{2}\right)^{2023}.$$

Thỏa mãn điều kiện bài toán. □

Trong lời giải trên chúng ta tìm đa thức dưới dạng lũy thừa của một nhị thức bậc nhất, theo hướng suy nghĩ ta có thể tìm đa thức dưới dạng là tích của các đa thức bậc nhất. Theo nghĩ đó ta có lời giải tiếp theo như sau

Lời giải Ta tìm đa thức dưới dạng

$$P_{2023}(x) = \prod_{k=1}^{2023} (x - a_k), \quad a_k \in,$$

Ta có

$$P_{2023}(x^2 - 2022) = \prod_{k=1}^{2023} (x^2 - 2022 - a_k). \tag{1}$$

Nếu chọn a_k sao cho

$$-2022 - a_k = -a_k^2, \tag{2}$$

(để tích (1) có dạng

$$\prod_{k=1}^{n} (x^2 - a_k^2) = \prod_{k=1}^{n} (x - a_k)(x + a_k) \vdots \prod_{k=1}^{2023} (x - a_k),$$

thì

$$P_{2023}(x^2 - 2022) = \prod_{k=1}^{2023} (x^2 - a_k^2) = P_{2023}(x) \prod_{k=1}^{2023} (x + a_k),$$

chia hết cho $P_{2023}(x)$).
Tuy nhiên dễ dàng thấy rằng

$$a_k = \frac{1 + \sqrt{8089}}{2}, \quad \text{hoặc} \quad a_k = \frac{1 - \sqrt{8089}}{2},$$

thỏa (2). □

Bài toán 2. *Chứng minh rằng với mỗi số thực $a > 1$ và mỗi $n \in \mathbb{N}^*$, tồn tại đa thức*

$$P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n \in \mathbb{R}[x],$$

thỏa mãn các điều kiện sau

(i) $|a_i| = a^{k_i}$, $k_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

(ii) Tất cả các nghiệm của đa thức $P(x)$ đều là các số thực khác nhau. Ngoài ra, khi n chẵn thì số các nghiệm dương bằng số các nghiệm âm, khi n lẻ thì giá trị tuyệt đối của hiệu giữa số các nghiệm dương và số các nghiệm âm bằng 1.

Phân tích: Bài toán cần xây dựng đa thức $P(x)$ có các hệ số thỏa mãn một điều kiện cho trước và có đủ nghiệm thực theo bậc của nó. Chúng ta quy nạp theo bậc của nó. Vì hệ số cao nhất của đa thức là 1 và các hệ số thỏa mãn điều kiện (i) nên chúng ta xây dựng đa thức theo đa thức ban đầu bằng cách cộng thêm đơn thức bậc lớn hơn giả thiết quy nạp là 1 và để bảo đảm điều kiện hệ số thỏa (i) thì ta nhân đa thức giả thiết quy nạp với lũy thừa của a là a^k, điều chỉnh mũ k để bảo đảm điều kiện (ii).

LỜI GIẢI Ta chứng minh bằng quy nạp theo $n \in \mathbb{N}^*$:

- Trường hợp $n = 1$, lấy $P(x) = x \pm a^k$, khi $n = 2$, lấy $P(x) = x^2 + a^k x - a^l$.

- Giả sử kết quả đúng đến $n \geq 2$. Xét đa thức $Q(x)$ có hệ số bậc cao nhất bằng 1, có bậc $2n$ và có các nghiệm là

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_n < 0 < x_{n+1} < x_{n+2} < \cdots < x_{2n}.$$

  Do tính liên tục của $Q(x)$ nên nó không đổi dấu trong các khoảng $(-\infty; x_1)$, $(x_i; x_{i+1})$, $(x_{2n}; +\infty)$ và $\lim\limits_{x\to\pm\infty} Q(x) = +\infty$ vì vậy tồn tại một dãy các các số thực

$$y_1 < x_1 < y_2 < x_2 < \cdots < y_n < x_n < y_{n+1} < 0 < x_{n+1} < y_{n+2} < x_{n+2} < \cdots < x_{2n} < y_{2n+1}$$

  đồng thời $Q(y_i)$ có dấu $+, -, +, -$, bắt đầu với $Q(y_1) > 0$.

  Xét đa thức $P(x) = x^{2n+1} + a^k Q(x)$, ở đây ta chọn $k \in \mathbb{N}$ đủ lớn sao cho $P(y_i)$ cùng dấu với $Q(y_i)$.

  Do bậc của $P(x)$ là lẻ nên $\lim\limits_{x\to\pm\infty} P(x) = \pm\infty$ và do tính liên tục của $P(x)$ nên $P(x)$ có $n+1$ nghiệm âm và n nghiệm dương z_i thỏa mãn

$$-\infty < z_1 < y_1 < z_2 < y_2 < \cdots < y_n < z_{n+1} < y_{n+1} < 0 < z_{n+2} < y_{n+2} < \cdots < z_{2n+1} < y_{2n+1}.$$

  Suy ra điều phải chứng minh.

- Trường hợp đa thức $Q(x)$ có hệ số bậc cao nhất bằng 1, có bậc $2n+1$ thì xét đa thức $P(x) = x^{2n+2} - a^k Q(x)$, và lập luận tương tự như trên ta cũng suy ra đa thức $P(x)$ có $n+1$ nghiệm âm và $n+1$ nghiệm dương.

Chứng minh hoàn tất □

Bài toán 3. *Tìm tất cả đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ thỏa mãn*

$$P^2(x) = 3P\left(x^2 - 5\right) + 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Phân tích: Chúng ta nhận thấy nếu đa thức $P(x)$ là hằng số thì nếu $P(x) = b$ thì b là nghiệm của phương trình $b^2 = 3b + 1$, ta dễ dàng tìm ra số b và đa thức $P(x) = b$, $x \in \mathbb{R}$ thỏa yêu cầu bài toán, tuy nhiên việc tìm đa thức có bậc dương (nếu có) đòi hỏi chúng ta cần phải viết dạng tổng quát của đa thức $P(x)$ sao cho $P(a) = b$ với a là số thực nào đó. Một cách tự nhiên ,ta cần chọn a sao cho a thỏa $a = a^2 - 5$.

LỜI GIẢI Trước hết chúng ta thấy

$$x^2 - 5 = x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1-\sqrt{21}}{2} \\ x = \frac{1+\sqrt{21}}{2} \end{array}\right.$$

Giả sử đa thức $P(x)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Trong (3) thay $x = a$ ta có:

$$P^2(a) = 3P\left(a^2 - 5\right) + 1 \Leftrightarrow P^2(a) - 3P(a) - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} P(a) = \dfrac{3 - \sqrt{13}}{2} \\ P(a) = \dfrac{3 + \sqrt{13}}{2} \end{array}\right.$$

Giả sử $P(x)$ là đa thức khác hằng, khi đó $P(x) \neq b$ với $b \in \left\{\frac{3-\sqrt{13}}{2}, \frac{3+\sqrt{13}}{2}\right\}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và b thỏa $b^2 - 3b - 1 = 0$.
Do $P(a) = b$ nên ta viết $P(x)$ dưới dạng

$$P(x) = (x - a)^n \cdot Q(x) + b, \quad Q(a) \neq 0.$$

Thay vào (3), ta được

$$((x - a)^n Q(x) + b)^2 = 3\left[\left(x^2 - 5 - a\right)^n \cdot Q\left(x^2 - 5\right) + b\right] + 1,$$

và

$$(x - a)^{2n} \cdot Q^2(x) + 2b(x - a)^n \cdot Q(x) + b^2 = 3\left(x^2 - a - 5\right)^n Q\left(x^2 - 5\right) + 3b + 1 \tag{4}$$

Vì $b^2 = 3b + 1$, $a^2 = a + 5$ nên (4) được viết thành

$$(x - a)^{2n} \cdot Q^2(x) + 2b(x - a)^n \cdot Q(x) = 3\left(x^2 - a^2\right)^n Q\left(x^2 - 5\right),$$

hay

$$(x - a)^n \cdot Q^2(x) + 2b \cdot Q(x) = 3(x + a)^n \cdot Q\left(x^2 - 5\right).$$

Thay $x = a$, ta có

$$2b \cdot Q(a) = 3(2a)^n \cdot Q\left(a^2 - 5\right),$$

$$2b \cdot Q(a) = 3(2a)^n \cdot Q(a),$$

$$2b = 3 \cdot (2a)^n.$$

Hay $3 \pm \sqrt{13} = 3(1 \pm \sqrt{21})^n$, điều này không xảy ra với mọi số nguyên dương n. Do đó $P(x) = b$. Thử lại $P(x) = b$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Vậy $P(x) \equiv \frac{3-\sqrt{13}}{2}$ hoặc $P(x) \equiv \frac{3+\sqrt{13}}{2}$. □

Trong lời giải trên, việc chọn ra các số a là quan trọng và tìm ra số b để từ đó dựng nên đa thức $P(x)$ có dạng $P(x) = (x - a)^n \cdot Q(x) + b$ với $n \in \mathbb{Z}^+$, $Q(a) \neq 0$. Số a có được là nghiệm của phương trình liên quan đến các biểu thức chứa x trong yêu cầu bài toán, đó là phương trình $x^2 - 3 = x$ và số b là giá trị của đa thức $P(x)$ tại $x = a$. Sử dụng cách thức xử lý chúng ta có thể sáng tác nhiều bài toán tương tự.

Bạn đọc có thể thử sức với bài toán sau:

Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ với hệ số thực thỏa mãn với mọi số thực x sao cho
$$P^2(x) = 2P\left(x^2 - 3\right) + 1.$$

Tương tự như trên, có 2 đa thức thỏa mãn yêu cầu đề bài là $P(x) = 1 + \sqrt{2}$ và $P(x) = 1 - \sqrt{2}$.

Bài toán 4 (Romania 1990). *Tìm tất cả các đa thức $P \in [x]$, thỏa mãn*
$$2P(2x^2 - 1) = [P(x)]^2 - 2, \quad \forall x \in .$$

Phân tích: Chúng ta có thể giải quyết bài toán và trình bày lời giải tương tự như bài toán 3, ở đây ta xét thêm một cách trình bày lời giải của bài toán này, mặc dù về cơ bản vẫn giống về ý tưởng.

LỜI GIẢI Giả sử $P(x) \neq P(1)$, đặt
$$P(x) = (x-1)^n Q(x) + P(1), \quad Q(1) \neq 0,\ n \in .$$

Khi đó, từ giả thiết suy ra
$$2^{n+1}(x-1)^n(x+1)^n Q(2x^2-1) + 2P(1) = (x-1)^{2n}[Q(x)]^2 + 2(x-1)^n Q(x)P(1) + [P(1)]^2 - 2.$$

Thay $x = 1$, suy ra
$$2f(1) = f^2(1) - 2,$$
và
$$2^{n+1}(x+1)^n Q(2x^2-1) = (x-1)^n Q^2(x) + 2Q(x)P(1).$$

Cho $x = 1$, ta được
$$Q(1) \cdot \left(2^{2n+1} - P(1)\right) = 0. \tag{5}$$

Lại cho $x = 1$ vào
$$2P(2x^2 - 1) = P^2(x) - 2, \quad \forall x \in,$$
ta giải ra được $P(1) = 1 \pm \sqrt{2} \notin$, nên từ (5) suy ra $Q(1) = 0$ (mâu thuẫn). Như vậy $P(x) \equiv P(1)$ là đa thức hằng và $P(x) = 1 \pm \sqrt{3}$. □

Bài toán 5. *Tìm cặp đa thức hệ số nguyên $P(x)$, $Q(x)$ khác đa thức không sao cho*
$$\frac{P\left(\sqrt{2} + \sqrt{17} + \sqrt{19}\right)}{Q\left(\sqrt{2} + \sqrt{17} + \sqrt{19}\right)} = \sqrt{2} + \sqrt{17}.$$

Phân tích: Để giải quyết bài toán ta tìm cách tách $\sqrt{19}$, khi đó nếu đặt $a = \sqrt{2} + \sqrt{17} + \sqrt{19}$ thì $\sqrt{2} + \sqrt{17} = a - \sqrt{19}$ và tìm cách xây dựng đa thức để loại bỏ $\sqrt{2} + \sqrt{17}$. Thông thường như vậy ta thường xây dựng trực tiếp đa thức tích các nhị thức bậc nhất để loại $\sqrt{2} + \sqrt{17}$.

LỜI GIẢI Đặt $a = \sqrt{2} + \sqrt{17} + \sqrt{19} \Rightarrow \sqrt{2} + \sqrt{17} = a - \sqrt{19}$. Xét đa thức

$$H(x) = \left(x - \sqrt{2} - \sqrt{17} - \sqrt{19}\right)\left(x + \sqrt{2} + \sqrt{17} - \sqrt{19}\right)\left(x + \sqrt{2} - \sqrt{17} - \sqrt{19}\right)\left(x - \sqrt{2} + \sqrt{17} - \sqrt{19}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\left(x - \sqrt{19}\right)^2 - \left(\sqrt{2} + \sqrt{17}\right)^2\right]\left[\left(x - \sqrt{19}\right)^2 - \left(\sqrt{2} - \sqrt{17}\right)^2\right] \\
&= \left(x - \sqrt{19}\right)^4 - 38\left(x - \sqrt{19}\right)^2 + 225 \\
&= x^4 - 4\sqrt{19}x^3 + 114x^2 - 76\sqrt{19}x + 361 - 38\left(x^2 - 2\sqrt{19}x + 19\right) + 225 \\
&= x^4 + 76x^2 - 136 - 4x^3\sqrt{19}.
\end{aligned}$$

Đặt $A(x) = x^4 + 76x^2 - 136$, $Q(x) = 4x^3$. Rõ ràng theo cách đặt thì

$$H(a) = 0 \Rightarrow A(a) - Q(a)\sqrt{19} = 0.$$

Do đó ta có

$$\frac{A(a)}{Q(a)} = \sqrt{19} \Rightarrow \frac{A(a)}{Q(a)} = a - \left(\sqrt{2} + \sqrt{17}\right).$$

Suy ra

$$\begin{aligned}
\sqrt{2} + \sqrt{17} = a - \frac{A(a)}{Q(a)} &= a - \frac{a^4 + 76a^2 - 136}{4a^3} \\
&= \frac{3a^4 - 7a^2 + 136}{4a^3}.
\end{aligned}$$

Vì vậy, nếu chọn $P(x) = 3x^4 - 76x^2 + 136$, $Q(x) = 4x^3$, thì ta có

$$\frac{P\left(\sqrt{2} + \sqrt{17} + \sqrt{19}\right)}{Q\left(\sqrt{2} + \sqrt{17} + \sqrt{19}\right)} = \sqrt{2} + \sqrt{17}.$$

□

Bằng cách tương tự, chúng ta có thể sáng tác nhiều bài toán khác Tìm cặp đa thức hệ số nguyên $P(x)$, $Q(x)$ khác đa thức không sao cho

$$\frac{P\left(\sqrt{2} + \sqrt{5}\right)}{Q\left(\sqrt{2} + \sqrt{5}\right)} = \sqrt{5}.$$

Tìm cặp đa thức hệ số nguyên $P(x)$, $Q(x)$ khác đa thức không sao cho

$$\frac{P\left(\sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{7}\right)}{Q\left(\sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{7}\right)} = \sqrt{2} + \sqrt{7}.$$

Bài toán 6. *Cho $f(x) = ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}[x]$ là đa thức bậc hai thỏa mãn điều kiện $f(x) \geq 0$, với mọi $x \geq 0$. Chứng minh rằng tồn tại đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$*

sao cho đa thức $f(x) \cdot P(x)$ có tất cả các hệ số đều không âm.

LỜI GIẢI Do $f(x) \geq 0, \forall x \geq 0$ nên

$$a > 0, \qquad c = f(0) \geq 0, \qquad \Delta_f = b^2 - 4ac \leq 0.$$

∘ Nếu $b \geq 0$ thì chọn $P(x) = 1$ thì ta được điều phải chứng minh.
∘ Nếu $b < 0$ thì ta tìm $P(x)$ dưới dạng $P(x) = (x+1)^n$, $n \geq 2$. Khi đó

$$\begin{aligned} f(x) \cdot P(x) &= (ax^2 + bx + c) \cdot (x+1)^n = (ax^2 + bx + c) \cdot \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k \\ &= ax^{n+2} + (b + an)x^{n+1} + \sum_{k=2}^{n} (aC_n^{k-2} + bC_n^{k-1} + cC_n^k)x^k + (b + cn)x + c \end{aligned}$$

Như vậy, ta cần chọn n sao cho

$$\begin{cases} b + an \geq 0 & (1) \\ b + cn \geq 0 & (2) \\ aC_n^{k-2} + bC_n^{k-1} + cC_n^k \geq 0, \forall k \geq 2 & (3) \end{cases}$$

Nhận thấy với $n > \max \left\{ \dfrac{-b}{a}; \dfrac{-b}{c} \right\}$ thì (1) và (2) thỏa mãn. Ta biến đổi (3) thành

$$g(k) = (a - b + c)k^2 - [a - b(n+2) + c(2n+3)]k + c(n+1)(n+2) \geq 0, \ \forall k \geq 2$$

Chú ý rằng hệ số của k^2 là $a - b + c > 0$ (do $a > 0$, $b < 0$, $c \geq 0$), do đó để (3) đúng với mọi $k \geq 2$, ta chọn n sao cho biệt thức Δ_g của tam thức bậc hai $g(k)$ không dương.
Rõ ràng Δ_g cũng là một tam thức bậc hai theo n có hệ số của n^2 là

$$(b - 2c)^2 - 4c(a - b + c) = b^2 - 4ac \leq 0.$$

nên $\lim\limits_{n \to \infty} \Delta_g = -\infty$. Do đó với n đủ lớn thì $\Delta_g \leq 0$. Từ đó suy ra tồn tại n đồng thời thỏa mãn (1), (2), (3), và ta thu được điều phải chứng minh. □

Bài toán 7. *Cho đa thức:*

$$g(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad n \geq 3$$

thỏa mãn $g(x) > 0$ với mọi $x > 0$. Chứng minh rằng tồn tại số tự nhiên m sao cho đa thức $Q(x) = g(x)(x+1)^m$ có các hệ số đều không âm.

LỜI GIẢI Ta xét 2 trường hợp :
∘ Khi $\deg g(x) = n = 2k$ thì ta có thể phân tích

$$g(x) = \prod_{i=1}^{k} (a_i x^2 + b_i x + c_i),$$

trong đó $a_ix^2 + b_ix + c_i > 0, \forall x > 0$. Theo bài toán 6, với mỗi đa thức $a_ix^2 + b_ix + c_i$ đều tồn tại số tự nhiên m_i sao cho đa thức

$$Q_i(x) = (a_ix^2 + b_ix + c_i)(x+1)^{m_i}$$

có các hệ số đều không âm. Từ đó

$$\prod_{i=1}^{k} Q_i(x) = \prod_{i=1}^{k}(a_ix^2 + b_ix + c_i)(x+1)^{m_i} = g(x)(x+1)^{m_1+\cdots+m_k}$$

có các hệ số đều không âm. Chọn $m = m_1 + m_2 + \cdots + m_k$, ta được điều phải chứng minh.

∘ Khi $\deg g(x) = n = 2k+1$ thì $g(x)$ có ít nhất một nghiệm không dương là $-a$, $(a \geq 0)$.

Khi đó $g(x) = (x+a)h(x)$, với $h(x) > 0, \forall x > 0$ và $\deg h(x) = 2k$. Theo trường hợp trên, tồn tại số tự nhiên m sao cho $h(x)(x+1)^m$ có các hệ số đều không âm, suy ra đa thức $g(x)(x+1)^m$ cũng có các hệ số đều không âm. □

Bài toán 8. *Cho $2n$ số thực đôi một khác nhau $a_1, a_2, \ldots, a_n$ và $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Điền vào bảng $n \times n$ theo quy tắc ô $(i; j)$ (hàng i và cột j) là số $a_i + b_j$. Chứng minh rằng nếu tích tất cả các số trên các cột bằng nhau thì tích các số ở mỗi hàng cũng bằng nhau.*

Phân tích: Yêu cầu bài toán là chứng minh nếu tích tất cả các số trên các cột bằng nhau thì tích các số ở mỗi hàng cũng bằng nhau nên nghĩ đến việc xây dựng đa thức có chứa các thừa số.

LỜI GIẢI Xét đa thức

$$P(x) = (x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_n)$$

Rõ ràng $P(b_j)$, $j = \overline{1,n}$ là tích các số ở cột thứ i. Theo giả thiết, ta có

$$P(b_1) = P(b_2) = \cdots = P(b_n) = C = \textbf{const}.$$

Do đó đa thức $G(x) = P(x) - C$ là đa thức bậc n, hệ số cao nhất bằng 1 và có n nghiệm phân biệt $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Suy ra

$$G(x) = (x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_n) - C = (x-b_1)(x-b_2)\cdots(x-b_n).$$

Lần lượt thay $x = -a_i$, $i = \overline{1,n}$ vào đẳng thức trên, ta được

$$-C = (-a_j - b_1)(-a_j - b_2)\cdots(-a_j - b_n),$$

hay

$$(a_j + b_1)(a_j + b_2)\cdots(a_j + b_n) = (-1)^{n+1} \cdot C = \textbf{const}.$$

Vế trái đẳng thức trên là tích các số ở hàng j. Từ đây dễ dàng suy ra điều phải chứng minh. □

Để xây dựng được đa thức như bài giải là vấn đề rất khó, người giải phải có những tư duy rất giỏi mới nghĩ đến được cách xây dựng này.

Bài toán 9. *Cho số nguyên $m > 2$. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 3$ thì số*

$$\frac{m^{2^n-1}-1}{m-1} - m^n,$$

luôn có một ước số dương có dạng $m^a + 1$, với a là số tự nhiên.

LỜI GIẢI Ta có

$$\frac{m^{2^n-1}-1}{m-1} - m^n = \frac{m^{2^n-1} + m^n - m^{n+1} - 1}{m-1}.$$

Đặt $n + 1 = 2^r \cdot s$, trong đó $r, s \in \mathbb{N}$, $r < n$ và s lẻ. Xét đa thức

$$P(m) = m^{2^n-1} + m^n - m^{n+1} - 1 = m^n \left[m^{2^r(2^{n-r}-s)} - 1 \right] - (m^{2^r \cdot s} + 1).$$

Do s và $2^{n-r} - s$ đều lẻ nên $P(m)$ chia hết cho $m^{2^r} + 1$, hay $P(m) = (m^{2^r} + 1) \cdot Q(m)$, trong đó $Q(m) \in \mathbb{Z}[x]$.
Mà $P(1) = 0$ nên $Q(1) = 0$, hay $Q(m) = (m-1) \cdot H(m)$, trong đó $H(m) \in \mathbb{Z}[x]$. Suy ra

$$\frac{m^{2^n-1}-1}{m-1} - m^n = \frac{P(m)}{m-1} = (m^{2^r} + 1) \cdot H(m),$$

từ đó suy ra điều phải chứng minh. □

Trong bài đã xây dựng đa thức để phân tích được số đã cho là tích của hai số nguyên dương, trong đó có một thừa số theo yêu cầu của đề bài.

Bài toán 10 (Bài P118 – Tạp chí Pi)**.** *Cho số nguyên dương k và đa thức hệ số nguyên $P(x)$ khác hằng và không có nghiệm nguyên. Tìm đa thức hệ số nguyên $Q(x)$ thỏa mãn*

$$Q\left(\left[\frac{n}{k}\right]\right) \equiv 0 \pmod{P(n)}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Phân tích:

- Theo yêu cầu bài toán, chúng ta cần nghĩ đến việc xây dựng đa thức $Q(x)$ sao cho $Q\left(\left[\frac{n}{k}\right]\right)$ là một tích trong đó có chứa thừa số $P(n)$.

- Xuất phát từ hệ thức quen thuộc $\left[\frac{n}{k}\right] \leq \frac{n}{k} < \left[\frac{n}{k}\right] + 1$, ta có thể xây dựng đa thức sau và kiểm tra nó thỏa yêu cầu bài toán

$$Q(x) = P(kx) \cdot P(kx+1) \cdots P(kx+k-1).$$

LỜI GIẢI Ta sẽ chứng minh $Q(x) = P(kx) \cdot P(kx+1) \cdots P(kx+k-1)$ thỏa mãn yêu cầu đề bài. Thật vậy, do $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ khác hằng nên $Q(x) \in \mathbb{R}[x]$ khác đa thức 0.

Với mọi số nguyên dương n, ta có

$$\left[\frac{n}{k}\right] \le \frac{n}{k} < \left[\frac{n}{k}\right] + 1 \quad \Rightarrow \quad k \cdot \left[\frac{n}{k}\right] \le n < k \cdot \left[\frac{n}{k}\right] + k.$$

nên $n \in \left\{k \cdot \left[\frac{n}{k}\right]; k \cdot \left[\frac{n}{k}\right] + 1; \ldots; k \cdot \left[\frac{n}{k}\right] + k - 1\right\}$. Do đó trong các số

$$P\left(k \cdot \left[\frac{n}{k}\right]\right), P\left(k \cdot \left[\frac{n}{k}\right] + 1\right), \ldots, P\left(k \cdot \left[\frac{n}{k}\right] + k - 1\right)$$

luôn có một số là $P(n)$. Chú ý rằng $P(x)$ không có nghiệm nguyên nên $P(n) \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
Từ đó suy ra $Q\left(\left[\frac{n}{k}\right]\right) \vdots P(n), \forall n \in \mathbb{N}^*$. Bài toán được chứng minh. □

Bài toán 11. *Giả sử đa thức hệ số hữu tỷ $f(x)$ bậc không bé hơn 2 và dãy số $a_1, a_2, \ldots$ là dãy số hữu tỉ thỏa mãn điều kiện $f(a_{n+1}) = a_n, \forall n \geq 1$. Chứng minh rằng tồn tại số nguyên dương N để với mọi số nguyên dương n thì Na_n là số nguyên.*

Lời giải

Ta chứng minh (a_n) bị chặn, tức là tồn tại số thực M sao cho $|a_n| \le M, \forall n \geq 1$.
Thật vậy, do $\deg f \geq 2$ nên $\lim_{x\to\infty} \frac{|f(x)|}{|x|} = +\infty$, do đó tồn tại số thực M (có thể chọn $M \geq |a_1|$) sao cho khi $|x| \geq M$ thì $|f(x)| \geq |x|$.
Ta sẽ chứng minh $|a_n| \le M, \forall n \geq 1$. Giả sử tồn tại a_n sao cho $|a_n| > M$, khi đó

$$|a_{n-1}| = |f(a_n)| \geq |a_n| > M \quad \Rightarrow \quad |a_{n-2}| = |f(a_{n-1})| \geq |a_{n-1}| > M \quad \cdots \Rightarrow |a_1| > M.$$

trái với cách chọn M, vô lý. Vậy (a_n) bị chặn.
Do $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ nên ta có thể viết $f(x)$ dưới dạng

$$f(x) = \frac{b_d x^d + b_{d-1} x^{d-1} + \cdots + b_0}{c},$$

trong đó $b_0, b_1, \ldots, b_d, c \in \mathbb{Z}$. Giả sử $a_1 = \frac{r}{s},\ r, s \in \mathbb{Z}$.
Ta đặt $N = s \cdot b_d$. Bằng quy nạp, ta chứng minh $Na_n \in \mathbb{Z}, \forall n \geq 1$. Thật vậy, ta có

$$Na_1 = s \cdot b_d \cdot \frac{r}{s} = r \cdot b_d \in \mathbb{Z}.$$

Giả sử $Na_n \in \mathbb{Z}$, với n nào đó. Xét đa thức

$$P(x) = \frac{c \cdot N^d}{b_d} \cdot \left(f\left(\frac{x}{N}\right) - a_n\right).$$

Rõ ràng $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ và có hệ số bậc cao nhất của x bằng 1. Chú ý rằng $f(a_{n+1}) = a_n$ nên $P(Na_{n+1}) = 0$, hay Na_{n+1} là nghiệm hữu tỉ của $P(x)$, và do đó là nghiệm nguyên. Phép quy nạp hoàn tất, bài toán được giải quyết. □

Ý tưởng hay trong việc giải quyết bài toán là xây dựng đa thức hệ số nguyên có hệ số cao nhất bằng 1 và nhận Na_{n+1} làm nghiệm. Việc xây dựng không dễ chút nào.

Bài toán 12. *Chứng minh rằng mọi đa thức mônic (là đa thức có hệ số cao nhất bằng* 1*) hệ số thực bậc n đều có thể biểu diễn bằng trung bình cộng của hai đa thức mônic hế số thực bậc n, trong đó mỗi đa thức có n nghiệm thực.*

LỜI GIẢI Gọi $f(x)$ là đa thức monic bậc n hệ số thực.
Nếu $n = 1$ thì $f(x) = x + a$. Xét $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x + 2a$, rõ ràng mỗi đa thức có một nghiệm thực và $f(x) = \dfrac{f_1(x) + f_2(x)}{2}$.
Nếu $n > 1$, xét đa thức $g(x) = (x-2)(x-4)\cdots(x-2(n-1))$ có bậc $n-1$ và các đa thức

$$P(x) = x^n - k\cdot g(x), \qquad Q(x) = -x^n + k\cdot g(x) + 2\cdot f(x).$$

Ta chứng minh với k đủ lớn, $P(x)$ và $Q(x)$ có n nghiệm thực.
Thật vậy, xét các giá trị của $g(x)$ tại n điểm $1, 3, \ldots, 2n-1$, những giá trị này đan dấu và có giá trị nhỏ nhất bằng 1 (vì nhiều nhất hai trong các thừa số có giá trị tuyệt đối bằng 1 và các thừa số còn lại có giá trị tuyệt đối lớn hơn 2). Mặt khác, tồn tại hằng số $c > 0$ sao cho

$$|x|^n < c \qquad \text{và} \qquad |2\cdot f(x) - x^n| < c, \qquad \text{với } 0 \le x \le 2n.$$

Lấy $k > c$ thì $P(x), Q(x)$ có giá trị đan dấu tại n điểm $x = 1, 3, \ldots, 2n-1$, nên $P(x), Q(x)$ đều có ít nhất $n-1$ nghiệm thực. Mà chúng là các đa thức bậc n nên mỗi đa thức đều có đủ n nghiệm thực. Mặt khác, rõ ràng chúng là mônic và trung bình cộng của chúng là $f(x)$ nên ta thu được điều phải chứng minh. □

Việc xây dựng các đa thức $P(x), Q(x)$ đảm bảo được $f(x)$ là trung bình cộng của hai đa thức $P(x)$và $Q(x)$, nhưng việc các đa thức đó có đủ n nghiệm thực cần có đa thức $g(x)$ và hệ số k để "*hiệu chỉnh*".

Trên đây là một số bài toán mà quá trình giải có xây dựng đa thức, hy vọng sẽ là nguồn tài liệu tham khảo cho những bạn quan tâm đến vấn đề.

Tài liệu

[1] HÀ HUY KHOÁI, *Số học*, NXB Giáo dục.

[2] LÊ ANH VINH (CHỦ BIÊN), *Định hướng bồi dưỡng học sinh năng khiếu Toán*, NXB Giáo dục.

[3] NGUYỄN VĂN MẬU, *Đa thức đại số và phân thức hữu tỉ*, NXB Giáo dục.

[4] TRẦN NAM DŨNG (CHỦ BIÊN), *Các phương pháp giải toán qua các kỳ thi Olympic*.

[5] *Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ*, NXB Giáo dục.

[6] *Tạp chí Pi*, NXB Giáo dục.

[7] *Tạp chí Epsilon.*

[8] Các đề thi học sinh giỏi và chọn đội tuyển của các tỉnh.

[9] Các đề thi học sinh giỏi và đề đề nghị của cuộc thi Olympic Đồng bằng Bắc Bộ.

Câu chuyện về định lý Trung hoa về số dư

Trần Nam Dũng(Trường PTNK TP HCM

PHẦN

I

Mở đầu

1. Học sinh tiểu học lớp lớn hoặc THCS lớp nhỏ hầu như ai cũng biết đến bài toán tìm số cam đại loại như sau "Bà Ba đem cam ra chợ bán, khoảng trên dưới 100 quả. Khi bà xếp mớ ba thì còn thừa 2 quả, xếp mớ 5 thì thừa 3 quả còn xếp mớ 7 thì vừa đủ. Hỏi bà ba có tất cả bao nhiêu quả cam".
   Một trong những cách giải thông dụng là mò từ từ. Đầu tiên, vì số cam chia 3 dư 2 nên số cam có thể là $2,\ 5,\ 8,\ 11,\ 14, \cdots$.
   Trong dãy này ta nhanh chóng tìm được số 8 chia 5 dư 3. Vậy là số 8 vừa chia 3 dư 2, vừa chia 5 dư 3. Nhưng nó chưa thỏa mãn đề bài vì 8 không chia hết cho 7. Để có thêm những số vừa chia 3 dư 2, vừa chia 5 dư 3, ta thêm vào số 8 các bội số của 15: 8, 23, 38, 53, 68, 83, $98 \cdots$ và kiểm tra xem số nào trong chúng chia hết cho 7. Kết quả là ta tìm được số 98 thỏa mãn yêu cầu đề bài.

2. Tìm hiểu thêm một chút, ta biết bài toán này còn có tên là bài toán Hàn Tín điểm binh. Tục truyền rằng khi Hàn Tín điểm quân số, ông cho lính xếp hàng 3, hàng 5 rồi hàng 7 rồi báo cáo số dư. Từ đó ông tính chính xác quân số đến từng người.
   Ví dụ nếu số dư tương ứng là $2,\ 3,\ 0$ thì số quân sẽ là 98.
   Nếu số dư, chẳng hạn là $1,\ 0,\ 2$, ta cũng làm như phần 1 ở trên như sau: Xét dãy các số chia 3 dư 1 là $1,\ 4,\ 7,\ 10, \cdots$ thì ta tìm được số 10 chia 3 dư 1 và chia 5 dư 0. Sau đó xuất phát từ số 10, ta cứ cộng thêm các bội của 15 vào thì được $10,\ 25,\ 40,\ 55,\ 70,\ 85,\ 100, \cdots$ và duyệt theo số dư cho 7 thì ta được số 100 thoả mãn yêu cầu.
   Cách làm ổn nhưng có vẻ thủ công quá! Không lẽ mỗi lần nhận được bộ số dư ta lại mò lại từ đầu như vậy? Có cách nào để giải bài toán một cách tổng quát không? Hóa ra là có, và điều này đã được Hàn Tín đưa ra từ xưa "Lấy số dư khi chia cho 3 nhân với 70, rồi cộng với số dư của 5 nhân với 21, cộng số dư cho 7 nhân với 15 rồi cộng hoặc trừ với một bội số của 105".
   Ví dụ với bộ số dư $(2, 3, 0)$ ta được
   $$2 \times 70 + 3 \times 21 + 0 \times 15 = 203.$$
   Trừ đi 105 thì được 98.
   Với bộ số dư $(1, 0, 2)$ thì được
   $$1 \times 70 + 0 \times 21 + 2 \times 15 = 100.$$
   Rất ư là lợi hại. Để nhớ quy tắc này, Hàn Tín còn đặt ra một bài thơ

   "Tam nhân đồng hành thất thập suy

1

Ngũ thụ mai hoa chấp nhất chi
Thất nhân đồng hành thu bán nguyệt
Trừ bách trừ ngũ định vi kỳ”

Bài này được Hoàng Xuân Hãn dịch thành

“Ba người cùng đi, ít bảy chục
Năm người cùng hàng, nhân hăm mốt
Bảy người cùng hàng, nhân mười lăm
Trừ trăm linh năm thì tính suốt”.

3. Công thức của Hàn Tín rất hiệu quả và thú vị. Nếu tò mò một chút, ta sẽ đặt câu hỏi: các số $70,\ 21,\ 15$ có tính chất gì và được tìm ra như thế nào? Một quan sát đơn giản cho thấy số 70 chia hết cho 5, 7 và chia 3 dư 2. Số 21 chia hết cho 3, 7 và chia 5 dư 1 còn số 15 thì chia hết cho 3, 5 và chia 7 dư 1. Chính vì lẽ đó khi ta có bộ số dư là (a, b, c) thì rõ ràng số $70a + 21b + 15c$ sẽ có số dư khi chia cho 3, 5, 7 lần lượt là a, b, c. Và ta chỉ cần cộng hay trừ với một bội số của 105 là sẽ được số tương ứng phù hợp với yêu cầu của đề bài. Việc tìm ra các số như 70, 21, 15 cũng không có gì khó khăn. Chẳng hạn để tìm số chia hết cho 5, 7 và chia 3 dư 1 thì ta chỉ cần duyệt trong các bội số của 35: $35,\ 70,\ 105$ và tất nhiên sẽ được ngay số 70. Các số 21, 15 cũng được tìm bằng cách tương tự.
   Phương pháp tương tự có thể được vận dụng để tìm ra các bộ số “thần bí”, khi 3, 5, 7 được thay bởi các số khác, chẳng hạn như trong bài toán sau:
   “Sau khi phải chui vào cái ống đồng để lên xe bắt quân kéo chạy thoát về Tàu, Thoát Hoan hú hồn nói A bát Xích kiểm điểm lại binh mã. A bát Xích cho lính xếp hàng 11 thì thấy thừa 7 người, xếp hàng 13 thì thấy thừa 5 người. Cuối cùng, ông ta cho xếp hàng 19 thì thấy thừa 6 người. Hãy cho biết số binh sĩ của Thoát Hoan lúc này biết rằng theo lịch sử thì con số đó không quá 3.000 người.”
   Học theo cách của Hàn Tín, ta bắt đầu đi tìm số X_1 chia hết cho 13, 19 và chia 11 dư 1. Ta sẽ tìm X_1 dưới dạng $13 \times 19 \times t = 247t$. Vì $247t \equiv 5t \pmod{11}$, nên ta nhanh chóng tìm được $t = 9$.
   Vậy $X_1 = 13 \times 19 \times 9 = 2223$.
   Tương tự như vậy, ta tìm X_2 chia hết cho 11, 19 và chia 13 dư 1. Ta sẽ tìm X_2 dưới dạng $11 \times 19 \times t = 209t$. Vì $209t \equiv t \pmod{13}$, nên ta nhanh chóng tìm được $t = 1$. Vậy $X_2 = 209$.
   Cuối cùng cũng giống hoàn toàn như trên, ta tìm được $X_3 = 286$.
   Áp dụng vào bài toán trên ta được đáp số là

$$2223 \times 7 + 209 \times 5 + 286 \times 6 = 18322.$$

   Con số này thỏa mãn tất cả các điều kiện về số dư, nhưng quá lớn. Ta phải điều chỉnh bằng cách trừ đi một bội số của $11 \times 13 \times 19 = 2717$. Ta trừ đi 6 lần thì được số 2020 là con số hợp lý, thỏa mãn yêu cầu đề bài.

4. Vậy định lý Trung hoa về số dư được phát biểu và chứng minh như thế nào? Rất đơn giản thôi. Cho $m_1,\ m_2, \ldots,\ m_k$ là các số nguyên dương đôi

một nguyên tố cùng nhau và $a_1,\ a_2,\dots,\ a_k$ là các số nguyên bất kỳ. Khi đó hệ phương trình đồng dư

$$X \equiv a_1 \pmod{m_1},\ X \equiv a_2 \pmod{m_2},\dots,\ X \equiv a_k \pmod{m_k}$$

luôn có nghiệm và hai nghiệm bất kỳ của nó sai khác nhau một bội số của $M = m_1m_2\cdots m_k$.
Cách chứng minh hoàn toàn tương tự như cách làm ở phần 3. Ta sẽ đi tìm các số $X_1,\ X_2,\dots,\ X_k$ sao cho

X_1 chia hết cho $m_2,\ m_3,\dots,\ m_k$ và chia m_1 dư 1;

X_2 chia hết cho $m_1,\ m_3,\dots,\ m_k$ và chia m_2 dư 1;

......

X_k chia hết cho $m_1,\ m_2,\dots,\ m_{k-1}$ và chia m_k dư 1.
Và nghiệm của hệ sẽ có dạng

$$X = a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_kX_k + Mt.$$

Đặt $M_i = \dfrac{M}{m_i}$ (tích của tất cả các số m_j, trừ m_i). Ta chỉ cần tìm X_i dưới dạng $X_i = M_i \cdot t_i$. Số t_i luôn tồn tại vì $(M_i,\ m_i) = 1$ (đây chính là lý do ta cần đến điều kiện các m_i đôi một nguyên tố cùng nhau).

5. Định lý Trung hoa về số dư có nhiều ứng dụng thú vị. Nhiều bài toán Olympic khai thác định lý này.

Bài toán 1 (Olympic Phần Lan) Tồn tại hay không một đa thức $P(x)$ nhận giá trị nguyên với mọi x nguyên, không có nghiệm nguyên nhưng với mọi số nguyên dương n đều tồn tại x sao cho $P(x)$ chia hết cho n?

Lời giải Ta chứng minh đa thức $P(x) = (3x-1)(2x-1)$ thỏa mãn yêu cầu đề bài. Với $n = 2^k \cdot m$, ta sẽ tìm x sao cho $P(x)$ chia hết cho 2 bằng cách chọn x sao cho

$$\begin{cases} 3x - 1 \equiv 0 \pmod{2^k} \\ 2x - 1 \equiv 0 \pmod{m} \end{cases}$$

Vì $(3,\ 2^k) = 1$ và $(2, m) = 1$ nên sẽ tồn tại a và b sao cho

$$3a \equiv 1 \pmod{2^k},\ 2b \equiv 1 \pmod{m},$$

từ đó thì hệ trên đây sẽ trở thành

$$\begin{cases} x \equiv a \pmod{2^k} \\ x \equiv b \pmod{m} \end{cases}$$

và sẽ có nghiệm theo định lý Trung hoa về số dư.

□

Bài toán 2 (IMO 1989) Chứng minh rằng với mọi n nguyên dương, ta luôn tìm được n số nguyên dương liên tiếp sao cho không có số nào trong chúng là lũy thừa với bậc ≥ 2 của một số nguyên tố.

Lời giải Ý tưởng chính của chúng ta là: một số sẽ không phải là luỹ thừa với bậc ≥ 2 của số nguyên tố p nếu nó chia hết cho p nhưng không chia hết cho p^2.
Từ ý tưởng này, ta chọn các số nguyên tố phân biệt $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Sau đó ta tìm X là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} X \equiv -1 + p_1 \pmod{p_1^2} \\ X \equiv -2 + p_2 \pmod{p_2^2} \\ \ldots \\ X \equiv -n + p_n \pmod{p_n^2} \end{cases}$$

Lúc đó $X+1, X+2, \ldots, X+n$ chính là n số cần tìm, vì $X+i$ chia hết cho p_i nhưng không chia hết cho p_i^2.

□

6. Quay trở lại với bài toán Hàn Tín điểm binh. Đây có phải là một ứng dụng thực tế của định lý Trung hoa về số dư? Suy nghĩ một chút, chúng ta thấy rằng Hàn Tín chẳng có lý do gì để phải điểm binh một cách phức tạp như vậy. Chỉ cần xếp hàng 7 chẳng hạn, xem được bao nhiêu hàng và dư bao nhiêu, rồi nhân lên là ra.
Vậy bản chất của vấn đề là gì? Không lẽ đây chỉ là một giai thoại, một bài toán vui?
Xem xét kỹ vấn đề, chúng ta thấy rằng ý đồ của Hàn Tín không phải là **đếm** số quân, mà là **dấu** số quân. Trong chiến tranh, đặc biệt là chiến tranh thời xưa, quân số là một điều tối mật, phải giữ kín. Trong quá trình báo cáo lên cho Hàn Tín, thông tin có thể bị rò rỉ bởi sẽ có thám báo khắp nơi. Bằng cách sử dụng các số dư, với trình độ của binh lính thời đó, dĩ nhiên sẽ không thể tính ra được quân số thực sự của từng nhóm và do đó sẽ không ước lượng được quân số của đội quân của Hàn Tín.
Với giả định như vậy, có thể khẳng định rằng Hàn Tín là người đã đưa ra một hình thức mã hóa thông tin. Đây chưa hẳn là mật mã vì thực ra nếu lộ thông tin về các số $3, 5, 7$ thì sẽ lộ ra các số $70, 21, 15$ ngay. Tuy nhiên, như đã nói ở trên, với trình độ toán học chung của binh lính thì hệ mã này khá an toàn rồi. Điều này cũng như hệ mã Ceasar bên phương Tây, chỉ là dịch chuyển bảng chữ cái lên 3 đơn vị thôi cũng đủ để đối phương không đọc được các thông điệp.

7. Với trình độ toán học và khả năng tính toán như hiện nay, dĩ nhiên không thể dùng định lý Trung hoa về số dư để làm mật mã. Tuy nhiên, định lý này được dùng một cách hiệu quả trong tính toán mô-đu-la, một công cụ quan trọng của nhiều hệ thống mật mã. Trong số học mô-đu-la, chúng ta sẽ thực hiện các tính toán trong mô-đun n với n là một số rất lớn. Chúng ta sẽ cần cộng, trừ, nhân, chia, nâng lên lũy thừa . . . tất cả trong mô-đun

này. Công việc thì khá đơn giản vì cộng trừ, nhân chia và nâng lên luỹ thừa thì ta đã học từ hồi tiểu học. Vấn đề là các số của chúng ta rất lớn, cả mô-đun n lẫn các số hạng trong các phép toán.
Ý tưởng cơ bản của chúng ta là xét phân tích chính tắc

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}.$$

Ta sẽ tính toán các phép toán trong các mô-đun nhỏ $p_i^{\alpha_i}$ (lúc này các số hạng cũng sẽ nhỏ đi khi được cắt theo mô-đun), sau đó dùng thuật toán Trung hoa số dư để phục hồi lại kết quả của phép tính cần thực hiện.
Ta lấy một ví dụ đơn giản: Tìm số dư trong phép chia 2^{2022} cho 2023.
Nếu 2023 là số nguyên tố thì bài toán này quá ngon: theo định lý nhỏ Fermat, đáp số sẽ là 1.
Nhưng 2023 không phải là số nguyên tố: $2023 = 7 \times 17^2$.
Ta sẽ dùng sơ đồ ở trên để giải bài toán này. Trước hết ta tìm số dư khi chia 2^{2022} cho 7. Vì $2^3 = 8 \equiv 1 \pmod 7$ nên ta dễ dàng suy ra $2^{2022} \equiv 1 \pmod 7$. Để tìm số dư khi chia 2^{2022} cho $17^2 = 289$ ta cũng chú ý rằng $\varphi(17^2) = 272$, nên $2^{272} \equiv 1 \pmod{17^2}$. Từ đó do $2022 \equiv 118 \pmod{272}$ nên $2^{2022} \equiv 2^{118} \pmod{17^2}$.
Để tính $2^{118} \pmod{17^2}$ ta chú ý: $118 = 64 + 32 + 16 + 4 + 2$. Ta có

$$\begin{aligned}
2^2 &\equiv 4 && \pmod{17^2}\\
2^4 &\equiv 16 && \pmod{17^2}\\
2^8 &\equiv 256 && \pmod{17^2}\\
2^{16} &\equiv (-33)^2 \equiv 222 && \pmod{17^2}\\
2^{32} &\equiv 222^2 \equiv 154 && \pmod{17^2}\\
2^{64} &\equiv 154^2 \equiv 18 && \pmod{17^2}
\end{aligned}$$

Cuối cùng

$$2^{118} \equiv 4 \cdot 16 \cdot 222 \cdot 154 \cdot 18 \equiv 234 \pmod{17^2}.$$

Từ đây, áp dụng thuật toán Trung hoa về số dư, ta tìm được 2^{2022} chia 2023 dư 1968. Ý tưởng là như vậy, khá đơn giản nhưng đem lại nhiều hiệu quả.
Ta tạm dừng câu chuyện phần 1 ở đây. Chúng ta sẽ thảo luận những vấn đề tiếp theo ở phần 2.

PHẦN

II

Những vấn đề tiếp theo

Trong phần 1, chúng ta khởi đầu từ các bài toán cổ đơn giản đi đến phát biểu và chứng minh định lý (cũng là thuật toán) phần dư Trung hoa ở dạng tổng quát cũng như mở đầu nói về các ứng dụng lợi hại của định lý kinh điển này.
Trong phần tiếp theo chúng ta sẽ tiếp tục thảo luận về định lý Trung hoa về số dư (CRT) trên góc độ tính toán và những ứng dụng có chiều sâu hơn của định lý này.

8. Tính toán chính trong thuật toán CRT là tính x_i sao cho $x_i \equiv 1 \pmod{m_i}$ và $x_i \equiv 0 (\mathrm{mod} m_j)$ với mọi j khác i. Muốn vậy chỉ cần tìm t_i sao cho $M_i t_i \equiv 1 \pmod{m_i}$, trong đó M_i là tích của tất cả các m_j với j khác i. Vậy t_i được tính như thế nào? Với các mô-đun nhỏ việc này không khó, chỉ cần duyệt vài số từ nhỏ đến lớn là ra ngay.
Nhưng gặp các số lớn thì sao? Chẳng hạn với $m_1 = 2003, m_2 = 2017, m_3 = 2023$ thì các được tính như thế nào? $(x_i = M_i t_i)$.
Dưới đây, ta sẽ nêu cách tính x_1. Các giá trị x_2 và x_3 được tính tương tự. Ta cần tìm t_1 sao cho $m_2 m_3 t_1 \equiv 1 \pmod{m_1}$. Tức là
$$2017.2023.t_1 \equiv 1 \pmod{2003} \Leftrightarrow 280 t_1 \equiv 1 \pmod{2003}.$$
Số 2003 là khá lớn nên ta khó lòng duyệt tuyến tính theo kiểu thử t_1 từ $1, 2, 3, \ldots$ Vậy ta có thể làm thế nào?
Do 2003 là số nguyên tố nên $280^{2002} \equiv 1 \pmod{2003}$. Như vậy ta chỉ cần chọn t_1 bằng $280^{2001} \pmod{2003}$ là xong.
Nhưng làm sao để tính $280^{2001} \pmod{2003}$? Chẳng nhẽ nhân 2000? Thế thì có khi còn chậm hơn phép duyệt tuyến tính (mỗi lần chỉ phải cộng thêm 280 vào số dư của phép chia trước đó). Không, ta sẽ một thuật toán tốt hơn để tính $280^{2001} \pmod{2003}$. Thuật toán này phần nào đã được giới thiệu ở cuối của phần 1 nhưng vẫn còn hơi thủ công. Ta sẽ trình bày phiên bản cải tiến của thuật toán nói trên, dựa vào biểu diễn nhị phân của 2001.
$$2001 = 11111010001_{(2)}.$$
Để cho tiện, ta đặt $a = 280$. Ta lần lượt tính
$$\begin{aligned} &1 \to 1 \to a \to a^2 \to a^3 \to a^6 \to a^7 \to a^{14} \to a^{15} \to a^{30} \to a^{31} \to a^{14} \\ &\to a^{62} \to a^{124} \to a^{125} \to a^{250} \to a^{500} \to a^{1000} \to a^{2000} \to a^{2001}. \end{aligned}$$
Như vậy, xuất phát từ 1 , ở bước i ta sẽ bình phương số đang có lên, sau đó sẽ nhân số đang có với a hoặc nhân với 1 (tức là để nguyên) tuỳ theo chữ số thứ i từ trái sang trong biểu diễn nhị phân của 2001 là 1 hay 0, rồi lại chuyển sang bước tiếp theo.

6

Vì số 2001 trong biểu diễn nhị phân có 11 chữ số nên ta có 11 bước, mỗi bước có một hoặc hai phép nhân (bình phương hoặc nhân với a).
Ở mỗi bước, vì tính theo mod 2003 nên các số hạng và kết quả đều có không quá 4 chữ Số. Một cách tổng quát, nếu ta cần tính $a^m \pmod n$ ($a < n,\ m < \varphi(n)$) thì số phép tính cần thực hiện trong $\pmod n$ là không quá $2len(m)$ trong đó $len(m)$ là số chữ số của m trong hệ nhị phân. Vì mỗi phép nhân trong mod$n$ tốn khoảng $(\text{len}(n))^2$ phép tính bit nên để tính $a^m \pmod n$ ta sẽ tốn khoảng $2/en(m)(\text{len}(n))^2$ phép tính bit.
Bằng cách này ta tính được $t_1 = 93$.
Thuật toán tính $a^m \pmod n$ ở trên được gọi là thuật toán bình phương liên tiếp ("repeated squarings").

9. Như vậy, chúng ta đã tìm được một thuật toán hiệu quả để giải quyết bài toán tìm nghịch đảo của a modulo n, và từ đó giải được bài toán CRT. Tuy nhiên vì số lượng bài toán cơ bản như vậy sẽ phải thực hiện khá nhiều trong quá trình tính toán nên chúng ta cố gắng tìm cách giải "tốt" hơn, nói một cách khác là nhanh hơn cho bài toán tìm nghịch đảo modulo này.
Nếu trình bày một cách ngây thơ thì cách này như sau:
Ta cần tìm t và x sao cho $280t = 1 + 2003x$. Từ đây thì
$$t = 7x + \frac{1 + 43x}{280},$$
dẫn đến việc tìm $x,\ y$ sao cho $1 + 43x = 280y$. Từ đây lại có
$$x = 6y + \frac{-1 + 22y}{43}.$$
Ta tiếp tục tìm $y,\ z$ sao cho $-1+22y = 43z$. Đến đây thì ta nhẩm nhanh được ngay $z = 1,\ y = 2$, từ đó
$$x = 6y + z = 6 \cdot 2 + 1 = 13,\ t = 7x + y = 7 \cdot 13 + 2 = 93.$$
Wow! Có vẻ là nhanh hơn hẳn.
Nếu nhìn kỹ quá trình trên, ta sẽ thấy nó liên quan đến thuật toán Euclid để tìm ước chung của hai số 2003 và 280. Đầu tiên chia 2003 được thương là 7, dư 43, sau lại chia 280 cho 43, được thương là 6, dư 22. Lại chia 43 cho 22 được thương là 1 dư 21. Lấy 22 chia cho 21 được thương là 1 dư 1. Lấy 21 chia 1 thì không có dư. Số dư cuối cùng, 1, chính là ước chung lớn nhất của 2003 và 280.
Thế còn t đã được tính thế nào từ dãy số dư nói trên? Bỏ qua phép "nhẩm nhanh"ở trên sau bước
$$-1 + 22y = 43z$$
ta tính tiếp
$$y = z + \frac{1 + 21z}{22}.$$
Lại tìm z,u sao cho
$$1 + 21z = 22u,$$

rồi

$$z = u + \frac{u-1}{21}.$$

Đến đây thì rõ ràng $u = 1,\ z = 1$. Ta thấy

$$u = 1,\ z = u + 0,\ y = z + 1,\ x = 6y + z,\ t = 7x + y.$$

Để đánh giá độ phức tạp của thuật toán Euclid, ta thử đánh giá số lần tối đa mà ta phải thực hiện phép chia:

$$r_0 = r_1 q_1 + r_2, r_1 = r_2 q_2 + r_3, \ldots$$

Dãy này sẽ giảm nhanh, nhất là khi các số lệch nhau và thương lớn. Dãy sẽ giảm chậm nhất khi các thương q_i nhỏ nhất, tức là bằng 1. Lúc này dãy sẽ giảm như dãy Fibonacci. Như thế ta ước lượng được chặn trên của số lần tối đa ta phải thực hiện phép chia là $\ln(r_0)$, tức là tương đương với $\operatorname{len}(r_0)$.
Nếu chú ý rằng phép chia các số có m chữ số có độ phức tạp cũng khoảng m^2 thì ta ước lượng thô độ phức tạp của thuật toán Euclid là $O(m^3)$ với $m = len(r_0)$, tức là không khác với cách dùng thuật toán bình phương liên tiếp ở trên.
Tuy nhiên, ta nhận thấy rằng, khác với thuật toán nhân nhanh, các số mà ta thực hiện các phép toán trong thuật toán Euclid sẽ nhỏ đi rất nhanh và dĩ nhiên độ phức tạp sẽ nhỏ đi. Một đánh giá kỹ hơn sẽ cho thấy độ phức tạp để tính USCLN của a, b sẽ là $O(\operatorname{len}(a)\operatorname{len}(b))$.
Việc tìm t sao cho at $\equiv 1 \pmod{n}$ được thực hiện theo thuật toán tìm USCLN của n và a như ở trên, rồi phục hồi lại t, do đó độ phức tạp hoàn toàn tương tự (chỉ nhân thêm hằng số).

10. Để dễ hình dung cho việc đánh giá độ phức tạp của thuật toán Euclid mở rộng (tức là thuật toán có đầu vào là a, b đầu ra là $d,\ s,\ t$ sao cho $(a,\ b) = d = as + bt$ ta trình bày các công thức đệ quy của thuật toán này:

$$r_0 = a,\ r_1 = b;\ s_8 = 1,\ s_1 = 0;\ t_0 = 0,\ t_1 = 1;$$
$$q_i = \left[\frac{r_{i-1}}{r_i}\right];\ r_{i+1} = r_{i-1} - r_i q_i;\ s_{i+1} = s_{i-1} - s_1 q_i;\ t_{i+1} = t_{i-1} - t_i q_i.$$

Dễ dàng chứng minh bằng quy nạp rằng $r_i = as_i + bt_i$. Cho nên khi thuật toán dừng thì ta cũng tìm được s và t.
Với cách trình bày này, thuật toán rất dễ để phân tích. Chú ý khi chạy thì các r_i giảm dần, s_i và t_i đan dấu và có trị tuyệt đối tăng dần. Ngoài việc tìm ra stt cho thuật toán Euclid mở rộng, s_1, t_i còn nhiều tính chất thú vị, cho ta nhiều ứng dụng bất ngờ. Tuy nhiên, về các ứng dụng này chúng ta sẽ đề cập đến trong một chủ đề khác, nói riêng về thuật toán Euclid và ứng dụng.
Thuật toán Euclid mở rộng dễ dàng cài đặt bằng các ngôn ngữ lập trình, sử dụng vòng lặp do while hay repeat until. Nếu chạy bằng tay thì tiện nhất là dùng bảng tính Excel.

11. Quay trở lại với các ứng dụng của CRT, trong phần 1, ta thấy CRT dùng để tính toán trong $\mathbb{Z}_n$, tức là tính theo mô-đun n. Số học mô-đu-lô (Modular arithmetic) có nhiều ứng dụng trong lý thuyết mật mã, lý thuyết mã hoá thông tin. Chẳng hạn để tính $a.b$ trong $\pmod n$ thì độ phức tạp (theo cách nhân thông thường nhất) là $O((len(n))^2)$. Nhưng nếu $n = p \cdot q$, ta có thể hiện thực hiện trong mô-đun p, q tương ứng rồi phục hồi bằng CRT thì độ phức tạp sẽ giảm đáng kể. Điều này đã được chúng ta minh họa ở mục cuối ở phần 1. Ta bỏ qua các phân tích chi tiết về độ phức tạp.

12. Định lý Trung hoa về số dư còn đóng vai trò quan trọng trong lý thuyết thặng dư bình phương. Nhắc lại, số nguyên a được gọi là thặng dư bình phương modn nếu $(a, n) = 1$ và tồn tại x nguyên sao cho $x^2 \equiv a(\text{mod} n)$.
Có hai câu hỏi quan trọng được đặt ra ở đây:
1) cho số nguyên a và số nguyên dương n, hỏi a có phải là thặng dư bình phương mod$n$?
2) nếu a là thặng dư bình phương thì làm sao để tìm tất cả các căn bậc hai của a modn, tức là các x sao cho $x^2 \equiv a \pmod n$.
Với câu hỏi thứ nhất thì điều kiện $(a, n) = 1$ có thể kiểm tra được dễ dàng bằng thuật toán Euclid. Với điều kiện thứ hai, ta chia ra thành 3 mức độ:
i) $n = p$ nguyên tố. Lúc này ta sử dụng ký hiệu Legendre đề kiểm tra (về ký hiệu Legendre chúng ta sẽ nói đến trong một bài khác. Chú ý thuật toán tính ký hiệu Legendre cũng liên quan đến thuật toán Euclid).
ii) Nếu n là lũy thừa của số nguyên tố lẻ $n = p^k$ thì ta có a là thặng dư bình phương modp^k khi và chỉ khi a là thặng dư bình phương $\pmod p$. Riêng trường hợp $n = 2^k$ thì với k nhỏ ta xét dễ, với $k \geq 3$ thì a thặng dư bình phương $\pmod 2^k$ khi và chỉ khi a thặng dư bình phương $\pmod 8$, và cụ thể là $a \equiv 1 \pmod 8$.
iii) Nếu $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_r^{a_r}$ thì a là thặng dư bình phương mod n khi và chỉ khi a là thặng dư bình phương $\pmod {p_i^{a_i}}$ với mọi $i = 1, 2, \dots, r$.
Như nói ở trên, việc kiểm tra bước 1 ta có thể thực hiện bằng ký hiệu Legendre hoặc với n nhỏ có thể liệt kê trực tiếp các thặng dư bình phương $\pmod n$. Ở bước 2, ta dùng một kỹ thuật gọi là "nâng lũy thừa", còn ở bước 3 công cụ mà ta sử dụng chính là định lý Trung hoa số dư.
Trong mục tiếp theo, ta sẽ xét một ví dụ cụ thể để vừa nêu hướng chứng minh các mục ii, iii nói trên, vừa nêu thuật toán tìm căn bậc hai của số nguyên a trong mô-đun hợp số n.

13. Bài toán cụ thể của chúng ta là: Xét xem 93 có phải là thặng dư bình phương mod 2023 không? Nếu phải hãy tìm tất cả các căn bậc hai của nó.
Vì $2023 = 7 \times 17^2$ nên điều kiện cần để 93 là thặng dư bình phương mod 2023 là nó phải là thặng dư bình phương $\pmod 7$ và $\pmod 1 7.93 \equiv 2 \equiv 3^2(\pmod 7)$ và $93 \equiv 8 \equiv 5^2(\pmod 1 7$ nên 93 là thặng dư bình phương mod 7 và 17. Ta chứng minh 93 là thặng dư bình phương $\pmod {17^2}$ bằng cách chỉ ra x sao cho $x^2 \equiv 93 \pmod {17^2}$.

Ta tìm x dưới dạng $x = 5 + 17t$. Khi đó

$$x^2 = 25 + 170t + 17^2t^2 = 93 + 17(10t - 4) + 17^2t^2.$$

Bây giờ ta chỉ cần chọn t sao cho $10t - 4$ chia hết cho 17 là xong. Phép duyệt đơn giản cho ta $t = 14$. Từ đó 243. Như vậy trong $\mod 7$ thì 93 là thặng dư bình phương và có hai căn bậc hai ± 3, còn trong $\pmod{17^2}$ thì 93 cũng là thặng dư bình phương và có hai căn bậc hai là ± 243. Bây giờ ta dùng CRT để tìm z sao cho

$$z \equiv \pm 3 \pmod 7 \text{ và } z \equiv \pm 243 \pmod{17^2}.$$

Khi đó Khi đó $z^2 \equiv 93 \pmod{2023}$. Vì có 4 trường hợp và mỗi một trường hợp sẽ có đúng một nghiệm $\mod 2023$ nên ta sẽ có 4 căn bậc hai của 93, lần lượt là ± 46 và ± 913. Nếu tính trong khoảng từ 0 đến 2022 thì là $46,\ 913,\ 1110$ và 1977.

14. Như vậy, xuất phát từ một bài toán đơn giản cho học sinh THCS chúng ta đã đi qua bài toán Hàn Tín điểm binh và dạng số học của định lý Trung hoa về số dư cùng các ứng dụng thú vị của định lý này trong số học mô-đu-la (với những ứng dụng quan trọng trong lý thuyết mật mã, lý thuyết mã hóa thông tin), trong thặng dư bình phương (cũng liên quan đến một số sơ đồ mã công khai và mã có nhiều phía tham gia). Thuật toán Trung hoa số dư còn có những áp dụng hiệu quả trong tính toán của phép biến đổi Fourier nhanh (Fast Fourier Transform – FFT). Định lý Trung hoa về số dư có thể phát biểu tổng quát cho các vành và có nhiều ứng dụng quan trọng trong lý thuyết vành đa thức. Chẳng hạn công thức nội suy Langrange chẳng qua là một hệ quả của định lý Trung hoa về số dư.

Như vậy thì câu chuyện về định lý Trung hoa về số dư còn rất dài. Chúng ta sẽ để dành cho các bài viết tiếp theo. Còn bây giờ, chúng ta tạm dừng câu chuyện về định lý Trung hoa số dư tại đây.

Tài liệu

[1] Hà Huy Khoái, Phạm Huy Điển, *Số học và thuật toán*, NXB Đại học quốc gia Hà Nội 2003.

[2] Viktor Schoup, *A computational Introduction to Algebra and Number Theory*, electronic version.

[3] C. Ding, D. Pei, A. Salomaa, *Chinese remainder theorem: Applications in Computing, Coding, Cryptography, World* Scientific 1996.

Về Bài Toán Croatia TST 2011

Nguyễn Song Minh

Giới thiệu. *Bài viết này, có nội dung viết về khái niệm ước số chung lớn nhất của hai số hữu tỷ, đồng thời cũng xây dựng khái niệm về hai số hữu tỷ nguyên tố cùng nhau, mở rộng từ các khái niệm tương ứng trên tập số nguyên, xuất phát từ việc tác giả cố gắng tìm kiếm một lời giải trực diện và tự nhiên cho một bài toán thi Olympic.*

Trong bài viết, tôi ký hiệu tập các số nguyên tố là $\mathbb{P}$, còn để thay cho diễn đạt *"hai số hữu tỷ x và y nguyên tố cùng nhau"*, tôi sẽ sử dụng ký hiệu $x \perp y$.

1. Mở đầu

Những vấn đề tôi nói đến ở bài viết này, bắt đầu từ bài toán trong đề thi Croatia, như sau:

Bài toán 1. *(Croatia TST 2011) Cho a, b là các số nguyên lớn hơn 1 và nguyên tố cùng nhau. Dãy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cho bởi công thức truy hồi $x_0 = a$, $x_1 = b$ và với mỗi số tự nhiên n thì*

$$x_{n+2} = \frac{x_{n+1}^2 + x_n^2}{x_{n+1} + x_n}.$$

Chứng minh rằng nếu $n \in \mathbb{N}$ và $n \geq 2$, thì x_n sẽ không là số nguyên.

Khi tiếp cận hòng xử lý bài toán này, tôi tin là nhiều bạn sẽ giống tôi, đó là nghĩ đến việc chứng minh khẳng định ở bài toán bằng phép quy nạp. Đó thực sự là một suy nghĩ rất tự nhiên. Và ở bước đầu tiên (kiểm tra với $n = 2$), thì quả thực dễ dàng, cụ thể là như sau

Với $n = 2$, từ cách cho dãy số, ta có ngay

$$x_2 = \frac{a^2 + b^2}{a + b}.$$

Bởi vì $a \perp b$, nên ta có $(a+b) \perp a$ và $(a+b) \perp b$ cho ta $(a+b) \perp ab$, hệ dẫn đến

$$\gcd(a+b,\, 2ab) \leq 2.$$

Đặt $\gcd(a+b,\, 2ab) = d$, từ $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$ ta có được

$$\gcd(a+b,\, a^2+b^2) = \gcd(a+b,\, -2ab) = d.$$

Và do đó sẽ khả diễn $a^2 + b^2 = du$, $a + b = dv$ trong đó u, $v \in \mathbb{N}^*$ và $u \perp v$. Như thế, x_2 được viết ở dạng tối giản là $\dfrac{u}{v}$. Vì $d \leq 2$, $a > 1$, $b > 1$, nên x_2 không thể là số nguyên, do

$$v = \frac{a+b}{d} \geq \frac{a+b}{2} > 1.$$

Với $n > 2$, lại một suy nghĩ rất tự nhiên xảy đến, là ta sẽ gán thế tương ứng vai trò của các số a và b thay cho x_n và x_{n+1}. Có điều là làm như vậy, thì bế tắc sinh ra. Bởi vì các khái niệm về gcd hay sự nguyên tố cùng nhau của chúng ta, lúc này đang bị phong kín trong "vòm trời"các số nguyên. Trong khi đó, ta đã kiểm định được x_2 không là số nguyên, cũng như điều cần chứng minh của chúng ta là x_n không nguyên với mỗi $n > 1$. Vậy ta có thể quy hàng, từ bỏ con đường đó để tìm một lối giải quyết khác cho bài toán? Tuy nhiên với một hướng suy nghĩ trực diện và ngoan cường hơn, thì chính bế tắc ấy sinh ra nhu cầu mở rộng các khái niệm về ước chung lớn nhất (gcd) và sự nguyên tố cùng nhau, từ $\mathbb{Z}$ lên $\mathbb{Q}$.

2. GCD và sự nguyên tố cùng nhau trên $\mathbb{Q}$

Ta sẵn biết là với $a \in \mathbb{Z}$ thì $\gcd(a, 0) = a$, còn với $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, thì $\gcd(a, b)$ là số nguyên dương d lớn nhất đồng thời là ước của cả a và b. Đã sẵn có một số tính chất cơ bản sau

i_1. *Với $a, b, k \in \mathbb{Z}$ thì $\gcd(ka, kb) = |k| \gcd(a, b)$.*

i_2. *Với $a, b, k \in \mathbb{Z}$ thì $\gcd(a + kb, b) = \gcd(a, b)$.*

i_3. *Với $a, b \in \mathbb{Z}$ và $\gcd(a, b) = d$ khi đó sẽ tồn tại $k, l \in \mathbb{Z}$ để viết được*

$$d = ka + lb.$$

i_4. *Với $a, b \in \mathbb{Z}$ và $\gcd(a, b) = d$, lúc ấy sẽ tồn tại $u, v \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn $\gcd(u, v) = 1$ và*

$$a = du, \quad b = dv.$$

Cũng nhắc lại ở đây là nếu $u, v \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn $\gcd(u, v) = 1$ ta sẽ nói *u và v là nguyên tố cùng nhau*, và sử dụng ký hiệu $u \perp v$, để nhắc đến thêm vài tính chất đáng chú ý sau

i_5. *Với $a, b \in \mathbb{Z}$ thì $a \perp b$ khi và chỉ khi tồn tại $k, l \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn*

$$ka + lb = 1.$$

i_6. *Với $a, b, c \in \mathbb{Z}$ thì $a \perp b$, $a \perp c$ khi và chỉ khi $a \perp bc$. Hệ quả là chúng ta có $a \perp b$ khi và chỉ khi $a^m \perp b^n$ với mọi cặp số nguyên dương (m, n).*

Với mỗi số nguyên a khác 0 cho trước, nếu sắp các số nguyên tố thành dãy $(p_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$ tăng ngặt, thì từ định lý cơ bản của Số Học chúng ta thấy là sẽ tồn tại duy nhất một bộ số tự nhiên $(k_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$, trong đó hầu hết $k_j = 0$ chỉ khác 0 với hữu hạn chỉ số j, để khả diễn

$$a = \pm \prod_{j \in \mathbb{N}^*} p_j^{k_j}.$$

Với $a \in \mathbb{Z}$ cho trước, các số mũ k_j ở biểu diễn ở trên, được xác định duy nhất theo mỗi chỉ số j, và ta ký hiệu là $v_{p_j}(a)$, để có thể viết lại biểu diễn phía trên

trở thành
$$a = \pm \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{v_p(a)}.$$

Vậy, nếu cố định một số nguyên tố p cùng quy ước $v_p(0) = \infty$, ta xác lập được hàm

$$\begin{aligned} v_p : \mathbb{Z} &\to \mathbb{N} \cup \{\infty\}, \\ x &\mapsto v_p(x). \end{aligned}$$

Hàm v_p vừa xây dựng, giúp chúng ta kiểm nghiệm nhiều tính chất Số Học, thông qua các đánh giá. Chẳng hạn, với $a,\, b \in \mathbb{Z}$ thì $a \mid b$ khi và chỉ khi bất đẳng thức $v_p(a) \le v_p(b)$ đúng với mọi số nguyên tố p. Và ngay từ điều đó, ta có được thêm tính chất sau về gcd

i_8. *Với $a,\, b \in \mathbb{Z}$ thì*
$$\gcd(a,\, b) = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\min\{v_p(a),\, v_p(b)\}}.$$

Chính tính chất vừa có được, là một con đường cho ta xây dựng các khái niệm về gcd, hay sự nguyên tố cùng nhau ở trên $\mathbb{Q}$. Ta để ý là nhờ dạng biểu diễn số nguyên như đã nêu, cùng với việc luôn viết được số hữu tỷ duy nhất ở dạng tối giản (với mẫu số là nguyên dương). Lúc này, nếu cho trước $r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ tùy ý, sẽ khả diễn
$$r = \pm \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{v_p(r)}.$$

Ở đây, các số mũ $v_p(r)$ là các số nguyên, hầu hết là bằng 0 trừ hữu hạn. Với chú ý về các phép toán với ∞, thì lấy $r,\, s \in \mathbb{Q}$ bất kỳ, ta có được các tính chất cơ bản sau đây

- *Số hữu tỷ r là số nguyên khi và chỉ khi $v_p(r) \ge 0$ với mọi $p \in \mathbb{P}$.*
- *$v_p(rs) = v_p(r) + v_p(s)$ với mọi $p \in \mathbb{P}$, hệ quả là $v_p(r^n) = nv_p(r)$ với $n \in \mathbb{N}^*$.*
- *$v_p(r \pm s) \ge \min\{v_p(r),\, v_p(s)\}$ và dấu -"đạt được khi $v_p(r) \ne v_p(s)$.*

Và ta có các định nghĩa về gcd cũng như sự nguyên tố cùng nhau ở trên $\mathbb{Q}$ như sau:

Định nghĩa. *Cho $r,\, s$ là các số hữu tỷ khác 0 nào đó, ước chung lớn nhất của chúng sẽ là một số hữu tỷ dương ký hiệu là $\gcd(r,\, s)$, và được xác định bởi quy tắc sau*
$$\gcd(r,\, s) = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\min\{v_p(r),\, v_p(s)\}}.$$

Ta sẽ nói r và s là nguyên tố cùng nhau, và viết $r \perp s$ nếu với $p \in \mathbb{P}$ tùy ý có

$$\min\{v_p(r),\, v_p(s)\} \le 0.$$

Lúc này nếu kết hợp quy ước là $\gcd(r,\,0) = r$ với mỗi $r \in \mathbb{Q}$, các tính chất của v_p nói ở trên, cùng các quy tắc cơ bản khi xác định min, max chúng ta sẽ có ngay các tính chất sau

j_1. *Với $a,\,b,\,k \in \mathbb{Q}$ thì $\gcd(ka,\,kb) = |k|\gcd(a,\,b)$.*

j_2. *Với $a,\,b \in \mathbb{Q}$, $k \in \mathbb{Z}$ thì $\gcd(a+kb,\,b) = \gcd(a,\,b)$.*

j_3. *Với $a,\,b \in \mathbb{Q}$ và $\gcd(a,\,b) = d$ khi đó sẽ phải tồn tại $k,\,l \in \mathbb{Z}$ để viết được*

$$d = ka + lb.$$

j_4. *Với $a,\,b \in \mathbb{Q}$ và $\gcd(a,\,b) = d$, lúc ấy sẽ tồn tại $u,\,v \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn $\gcd(u,\,v) = 1$ và*

$$a = du, \quad b = dv.$$

j_5. *Với $a,\,b \in \mathbb{Q}$ thì $a \perp b$ khi và chỉ khi tồn tại $k,\,l \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn*

$$ka + lb = 1.$$

j_6. *Với $a,\,b,\,c \in \mathbb{Q}$ thì $a \perp b$, $a \perp c$ khi và chỉ khi $a \perp bc$. Hệ quả là chúng ta có $a \perp b$ khi và chỉ khi $a^m \perp b^n$ với mọi cặp số nguyên dương $(m,\,n)$.*

Ta thấy rằng, các khái niệm mới mở rộng từ $\mathbb{Z}$ lên $\mathbb{Q}$ vẫn giữ y nguyên được hệ thống các tính chất như cũ. Và bây giờ, ta sẽ áp dụng vào việc xử lý bài toán đưa ra từ đầu bài viết.

Lời giải bài toán Croatia TST 2021. Ta sẽ đi chứng minh là với $s,\,t \in \mathbb{Q}_{>0}$ thỏa mãn $s \perp t$ thì $\left(\dfrac{s^2+t^2}{s+t}\right) \perp s$ và $\gcd(s^2+t^2,\,s+t) \le 2$. Thật vậy, nếu như không xảy ra $\left(\dfrac{s^2+t^2}{s+t}\right) \perp s$, thì nghĩa là phải tồn tại $p \in \mathbb{P}$ để

$$\min\left\{v_p\left(\frac{s^2+t^2}{s+t}\right),\, v_p(s)\right\} > 0.$$

Từ $v_p(s) > 0$ và $s \perp t$, ta có $v_p(t) \le 0$, lúc đó có

$$v_p(s^2+t^2) = v_p(t^2), \quad v_p(s+t) = v_p(t).$$

Cho ta ngay mâu thuẫn là

$$0 < v_p\left(\frac{s^2+t^2}{s+t}\right) = v_p(s^2+t^2) - v_p(s+t) = v_p(t^2) - v_p(t) = v_p(t) \le 0.$$

Vậy là đã có được $\left(\dfrac{s^2+t^2}{s+t}\right) \perp s$. Chúng ta lấy $p \in \mathbb{P}$, $p > 2$ tùy ý, nếu như có $\min\left\{v_p\left(s^2+t^2\right),\, v_p\left(s+t\right)\right\} > 0$, lúc này thì do là $0 < v_p(s+t)$ cho nên ta thấy rằng $v_p(s) > 0$ khi và chỉ khi $v_p(t) > 0$. Nhưng điều đó không thể xảy ra được, do $s \perp t$, vậy có nghĩa $v_p(s) < 0$, $v_p(t) < 0$. Và đánh giá đó lại kéo theo $v_p(2st) < 0 < v_p\left((s+t)^2\right)$ để mà có mâu thuẫn là

$$0 < v_p(s^2+t^2) = v_p((s+t)^2 - 2st) = v_p(2st) < 0.$$

Lý lẽ vừa rồi cho thấy là cứ với p là số nguyên tố lẻ, thì

$$\min\left\{v_p\left(s^2+t^2\right),\, v_p\left(s+t\right)\right\} \leq 0,\ (*).$$

Ta chỉ còn cần chỉ ra $\min\left\{v_2\left(s^2+t^2\right), v_2\left(s+t\right)\right\} \leq 1$. Thật vậy, nếu điều đó là sai, ta lại sẽ có ngay $v_2(s+t) \geq 2$, và từ $s \perp t$ ta lại có $v_2(s) \leq 0$, $v_2(t) \leq 0$. Và nhận thấy

$$v_2(2st) = 1 + v_2(s) + v_2(t) \leq 1 < 2v_2(s+t) = v_2((s+t)^2).$$

Để lại có mâu thuẫn là

$$1 < v_2(s^2+t^2) = v_2((s+t)^2 - 2st) = v_2(2st) \leq 1.$$

Vậy $\min\left\{v_2\left(s^2+t^2\right), v_2\left(s+t\right)\right\} \leq 1$ kết hợp với $(*)$ có $\gcd\left(s^2+t^2,\, s+t\right) \leq 2$. Nói khác đi, nhận xét ở phía đầu lời giải đã được khẳng định. Bây giờ do $x_0 = a$, $x_1 = b$, $a \perp b$, từ nhận xét có $x_2 \perp x_1$, $\gcd\left(x_1^2 + x_2^2,\, x_1 + x_2\right) \leq 2$. Bằng phép quy nạp toán học kết hợp nhận xét, với mỗi số nguyên dương n ta có được

$$x_{n+1} \perp x_n, \quad \gcd(x_n^2 + x_{n+1}^2,\, x_n + x_{n+1}) \leq 2.$$

Lấy ra $n \in \mathbb{N}$ tùy ý, đặt $\gcd\left(x_n^2 + x_{n+1}^2,\, x_n + x_{n+1}\right) = \delta$, ta sẽ có $u,\, v \in \mathbb{N}^*$, $u \perp v$ để khả diễn

$$x_n^2 + x_{n+1}^2 = u\delta, \quad x_n + x_{n+1} = v\delta.$$

Lúc này x_{n+2} là số hữu tỷ viết ở dạng tối giản là $\dfrac{u}{v}$, trong đó

$$v = \frac{x_n + x_{n+1}}{\delta} \geq \frac{x_n + x_{n+1}}{2}.$$

Lại dễ dàng thấy rằng do a, b đều lớn hơn 1, nên $x_k > 1$ với mọi $k \in \mathbb{N}$, cho ta $v > 1$. Nói khác đi x_{n+2} không thể là một số nguyên. Và từ đó, ta có được lời giải cho bài toán.

3. Vĩ thanh

Bài toán vừa được xử lý, nghe nói còn có một cách giải khác rất ngắn, cụ thể cái "rất ngắn"đấy thế nào, thì tôi lại không quan tâm. Một vấn đề nữa ở đây, đó là xây dựng khái niệm gcd hay quan hệ nguyên tố cùng nhau trên $\mathbb{Q}$ như đã để làm gì, hay chỉ để giải quyết một bài toán vốn sẵn lời giải? Đấy, lại cũng là một thứ tôi càng không quan tâm. Bởi từ lâu, tôi không muốn tìm những phương pháp có tính công nghiệp, giúp giải một lớp dạng các bài toán giời ơi đất hỡi gây áp lực hàng ngày. Sau khi nghĩ ra cách xử lý này, tôi hồi tưởng đến chuyện Tartaglia đã nghĩ ra việc lấy căn số âm hòng giải các phương trình bậc ba. Rõ ràng ở thời buổi của Tartaglia, khi mà người ta chưa xây dựng trường phức chặt chẽ, thì hành động của ông ấy là phiêu lưu. Và sau này, rõ ràng giá trị của ý tưởng "liều lĩnh"kia của Tartaglia, không phải chỉ là việc giải phương trình bậc ba, mà là khai sinh ra Giải Tích Phức, một môn học nhiều ý nghĩa. Câu chuyện đấy, phần nào, cũng giống như Galois đã khai sinh ra lý thuyết nhóm. Ở vai trò của một giáo viên dạy toán, tôi tự xác định với bản thân bổn phận hướng lái giúp học trò tiếp cận những tư tưởng hiện đại và mạnh mẽ hơn.

Để kết thúc bài viết, tôi xin tổng quát bài toán ban đầu như sau:

Bài toán. *Cho a, b là các số nguyên lớn hơn 1 và nguyên tố cùng nhau. Với m là một số nguyên dương, xét dãy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cho bởi $x_0 = a$, $x_1 = b$ và với mọi số tự nhiên n thì*

$$x_{n+2} = \frac{x_n^m + x_{n+1}^m}{x_n + x_{n+1}}.$$

Tìm tất cả các số nguyên dương m, sao cho $x_n \in \mathbb{Z}$ với mỗi $n \in \mathbb{N}$.

MỘT SỐ BỔ ĐỀ VỀ GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

NGUYỄN SONG THIÊN LONG (TRƯỜNG THPT CHUYÊN BẾN TRE)

Giới thiệu. *Các vấn đề về dãy số đã quá quen thuộc trong các đề thi Olympic Toán, xuất hiện trong hầu hết đề thi chọn học sinh giỏi quốc gia (VMO) các năm. Các bài toán này thường có nhiều hướng tiếp cận và xử lý, tùy thuộc vào góc nhìn cá nhân mà học sinh có thể biến đổi để áp dụng định lý, bổ đề, ... Trong bài viết này, tôi xin giới thiệu một số bổ đề mạnh mẽ cho giới hạn dãy số, được sử dụng linh hoạt và hiệu quả trong nhiều tình huống.*

1. Kiến thức cần nắm

Ta xét bài toán tổng quát sau:

Bài toán 1. *Cho k là một số nguyên dương và $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ là các số thực dương có tổng bằng 1. Xét dãy số (u_n) bị chặn dưới thỏa mãn tính chất:*

$$u_{n+k} \le \alpha_1 u_n + \alpha_2 u_{n+1} + \dots + \alpha_k u_{n+k-1}, \quad \forall n \ge 1. \tag{1}$$

Khi đó, dãy (u_n) hội tụ.

LỜI GIẢI Đặt $A_n = \max\{u_n, u_{n+1}, \dots, u_{n+k-1}\}$. Khi đó, dễ thấy (A_n) cũng bị chặn dưới và

$$A_n \ge \alpha_1 u_n + \alpha_2 u_{n+1} + \dots + \alpha_k u_{n+k-1} \ge u_{n+k}, \quad \forall n = 1, 2, \dots \tag{2}$$

Do vậy, ta có

$$A_n = \max\{u_n, u_{n+1}, \dots, u_{n+k-1}, u_{n+k}\} \ge \max\{u_{n+1}, u_{n+2}, \dots, u_{n+k-1}, u_{n+k}\} = A_{n+1}.$$

Suy ra (A_n) là dãy giảm và bị chặn dưới, nên hội tụ về một hằng số A nào đó. Theo tính chất giới hạn của dãy số, với mỗi $\varepsilon > 0$, tồn tại một số tự nhiên n_0 đủ lớn để

$$A - \varepsilon < A_n < A + \varepsilon, \ \forall n \ge n_0. \tag{3}$$

Ta sẽ chứng minh dãy (u_n) cũng hội tụ về A. Từ (3), ta suy ra

$$u_n \le A_n < A + \varepsilon, \ \forall n \ge n_0.$$

Đặt $K = \max\left\{\frac{2-\alpha_1}{\alpha_1}, \dots, \frac{2-\alpha_k}{\alpha_k}\right\}$. Ta chứng minh

$$u_n > A - K\varepsilon, \ \forall n \ge n_0 + k - 1. \tag{4}$$

Nếu $u_n \ge A - \varepsilon$ thì bất đẳng thức (4) hiển nhiên đúng do $K > 1$.
Giả sử tồn tại $n \ge n_0 + k - 1$ mà $u_n < A - \varepsilon$. Như vậy, trong các số $u_{n+1}, \dots, u_{n+k-1}$ phải có ít nhất một số lớn hơn $A - \varepsilon$ (do (3)). Gọi số đó là u_{n+m}. Khi đó, với chú ý rằng $n + m - k \ge n_0$, ta có

$$u_{n+m-k}, \dots, u_{n+m-1} < A + \varepsilon.$$

Sử dụng các đánh giá này, ta thu được

$$u_{n+m} \le \sum_{\substack{i=1 \\ i \ne k+1-m}}^{k} \alpha_i u_{n+m-k+i-1} + \alpha_{k+1-m} u_n < (1 - \alpha_{k+1-m})(A + \varepsilon) + \alpha_{k+1-m} u_n.$$

Từ đó suy ra

$$u_n > \frac{u_{n+m} - (1-\alpha_{k+1-m})(A+\varepsilon)}{\alpha_{k+1-m}} > \frac{A - \varepsilon - (1-\alpha_{k+1-m})(A+\varepsilon)}{\alpha_{k+1-m}}$$
$$= A + \frac{2-\alpha_{k+1-m}}{\alpha_{k+1-m}}\varepsilon \geq A - K\varepsilon.$$

Như vậy, bất đẳng thức (4) luôn đúng với mọi $n \geq n_1 = n_0 + k - 1$. Từ đây, ta suy ra

$$A - K\varepsilon < u_n < A + \varepsilon < A + K\varepsilon, \ \forall n \geq n_1.$$

Đặt $\varepsilon' = K\varepsilon$. Khi đó, bất đẳng thức trên được viết lại thành $A - \varepsilon' < u_n < A + \varepsilon'$ hay

$$|u_n - A| < \varepsilon', \ \forall n \geq n_1.$$

Sử dụng *định nghĩa giới hạn*, ta suy ra dãy (u_n) cũng hội tụ về A. □

Nếu dãy (u_n) bị chặn dưới bởi 0 thì đánh giá bất đẳng thức (2) vẫn đúng khi ta thay đổi giả thiết thành $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k < 1$. Lúc này, các lý luận vẫn được đảm bảo nên kết quả bài toán và cách chứng minh trên vẫn giữ được tính đúng đắn. Ngoài ra, dễ thấy khi đó $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Bài viết này chủ yếu giới thiệu các ví dụ áp dụng (1) trên với trường hợp $k = 2$ và $\alpha_1 + \alpha_2 < 1$, được phát biểu lại như sau:

Định lý 1 Cho dãy số dương (a_n) và hai số thực dương p, q thỏa mãn $p + q < 1$ và

$$a_{n+2} \leq pa_{n+1} + qa_n, \ \forall n \geq 1. \tag{5}$$

Khi đó $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Riêng trường hợp này, ta cũng có thể chứng minh đơn giản như sau:

Lời giải Bằng quy nạp, ta chứng minh được

$$0 \leq a_n \leq (pa_2 + qa_1)\left(\frac{q}{1-p}\right)^{n-3}, \ \forall n \geq 5.$$

Từ giả thiết suy ra $0 < \frac{q}{1-p} < 1$. Do đó, theo *nguyên lý kẹp* ta có $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$. □

Tuy nhiên, trong một số tình huống, ta chỉ có thể đánh giá và biến đổi dãy số ban đầu thành dạng $a_{n+2} \leq pa_{n+1} + qa_n + b_n$ (trong đó b_n thường là $g(n)$). Rõ ràng lúc này ta không thể áp dụng (5) được! Nhưng nếu ta có (b_n) là dãy không âm và $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$ thì ta vẫn chứng minh được $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$. Ta xét bổ đề sau:

Định lý 2 Cho các số thực dương p, q thỏa mãn $p + q < 1$. Xét hai dãy số không âm

$(a_n), (b_n)$ thỏa mãn $\lim b_n = 0$ và

$$a_{n+2} \leq pa_{n+1} + qa_n + b_n, \quad \forall n \geq 1. \tag{6}$$

Khi đó, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

LỜI GIẢI Với $r \in \mathbb{R}$ (được chọn sau), ta có

$$a_{n+2}+ra_{n+1} \leq (p+r)a_{n+1}+qa_n+b_n = (p+r)\left(a_{n+1} + \frac{q}{p+r}a_n\right)+b_n, \forall n \geq 1.$$

Đặt $v_n = a_{n+1} + ra_n, \forall n \geq 1$. Ta chọn r sao cho

$$\begin{cases} r > 0 \\ p + r < 1 \\ \frac{q}{p+r} = r \end{cases}$$

Cụ thể

$$0 < r = \frac{-p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2} < \frac{-p + \sqrt{p^2 + 4(1-p)}}{2} = 1-p \Rightarrow p+r \Rightarrow p+r < 1.$$

Do đó $v_{n+1} \leq (p+r)v_n + b_n,\ \forall n \geq 1$. Mặt khác, do cách đặt v_n nên $0 \leq a_n \leq v_{n-1},\ \forall n \geq 2$. Vậy để chứng minh $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ thì ta chứng minh $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$. Do đó, ta chỉ cần chứng minh bổ đề (quen thuộc) sau: □

Định lý 3 Cho số thực $q \in (0,1)$. Xét hai dãy số không âm $(a_n), (b_n)$ thỏa mãn $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$ và

$$a_{n+1} \leq qa_n + b_n,\ \forall n \geq 1. \tag{7}$$

Khi đó $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

LỜI GIẢI Vì (b_n) là dãy số không âm và hội tụ nên dãy này bị chặn. Do đó, tồn tại một số thực dương M sao cho $0 \leq b_n \leq M,\ \forall n \geq 1$.
Bằng phương pháp quy nạp, ta chứng minh được

$$a_n \leq q^m a_{n-m} + \sum_{k=0}^{m-1} q^k b_{n-k} \text{ với mọi } m, n \in \mathbb{N}^* : m \leq n. \tag{8}$$

Từ (8), với $m = n$, ta có

$$a_n \leq q^n a_0 + M\sum_{k=0}^{n-1} q^k = q^n a_0 + \frac{M(1-q^n)}{1-q} < A, \text{ trong đó } A = a_0 + \frac{M}{1-q}.$$

Với mỗi $\varepsilon > 0$, ta chọn các số dương $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2A}$ và $\varepsilon_2 = \frac{(1-q)\varepsilon}{2}$. Vì các dãy

$(q^n), (b_n)$ đều hội tụ về 0 nên luôn tồn tại các số tự nhiên N_1, N_2 sao cho

$$\begin{cases} q^i \le \varepsilon_1, \ \forall i \ge N_1 \\ b_j \le \varepsilon_2, \ \forall j \ge N_2 \end{cases}$$

Áp dụng (8) với $m = N_1$ và chọn $N_\varepsilon = N_1 + N_2$, ta được

$$0 \le a_n \le A\varepsilon_1 + \sum_{k=0}^{m-1} q^k \varepsilon_2 < A\varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_2}{1-q} = \varepsilon, \ \forall n \ge N_\varepsilon.$$

Sử dụng *định nghĩa giới hạn*, ta suy ra $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$.

Vậy phép chứng minh được hoàn tất. □

Ta thấy nếu các hệ thức (1), (5), (6), (7) chỉ đúng với mọi $n \ge N$ (N là một số tự nhiên nào đó), hay đẳng thức không xảy ra, thì các bổ đề trên vẫn đúng.

1. Các bổ đề trên đều có nét "tương đồng", nên tùy thuộc vào cách xác định và tính chất của từng dãy số mà ta đưa ra sự lựa chọn thích hợp. Trong hầu hết các bài toán, ta phải thông qua một số phép biến đổi trung gian (đôi khi là tương đối phức tạp) như đánh giá bất đẳng thức, sử dụng dãy số phụ, ... để đưa dãy số đề bài về "dạng" của bổ đề.

2. Do nhận xét trên nên các đánh giá này không cần quá "chặt".

3. Đối với bài toán tổng quát, cần chú ý rằng dãy số (u_n) chỉ hội tụ về 0 khi (u_n) là dãy không âm và $\sum \alpha_i \in (0,1)$; còn nếu $\sum \alpha_i = 1$ thì ta chỉ suy ra được dãy (u_n) hội tụ.

4. Khi muốn chứng minh dãy (x_n) hội tụ về L ($L > 0$), ta không thể áp dụng trực tiếp bổ đề, thay vào đó ta sẽ tìm cách áp dụng bổ đề cho dãy $(|x_n - L|)$, để khi $\lim\limits_{n \to +\infty} |x_n - L| = 0$ thì $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = L$.

2. Một số ví dụ áp dụng

Bài toán 2. *Cho dãy số (u_n):*

$$\begin{cases} u_1 = 3, \\ u_{n+1}^3 - 3u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Tính $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

LỜI GIẢI Bằng quy nạp, ta chứng minh được $u_n \ge 2, \ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Ta có

$$u_{n+1}^2 - 3u_{n+1} - 2 = (u_{n+1} - 2)(u_{n+1} + 1)^2 = \sqrt{u_n + 2} - 2,$$

do đó

$$9(u_{n+1} - 2) \leq \frac{u_n - 2}{\sqrt{u_n + 2} + 2} \leq \frac{u_n - 2}{4}, \ \forall n \geq 1.$$

Suy ra

$$|u_n - 2| \leq \frac{1}{36}|u_{n-1} - 2| \leq \frac{1}{36^2}|u_{n-2} - 2| \leq \ldots \leq \left(\frac{1}{36}\right)^{n-1} |u_1 - 2|, \ \forall n \geq 1.$$

Theo *nguyên lý kẹp* suy ra $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$. □

Đây là một ví dụ của bài toán tổng quát với dãy bị chặn dưới bởi 0, $k = 1$ và $0 < \alpha_1 < 1$, thực chất là một trường hợp của "ánh xạ co".

Bài toán 3. *Cho dãy số $(x_n)_{n=1}^{+\infty}$ xác định như sau: x_1, x_2, x_3 là các số dương cho trước;*

$$x_{n+3} = \sqrt{x_{n+2}} + \sqrt{x_{n+1}} + \sqrt{x_n}, \ \forall n = 1, 2, \ldots$$

Chứng minh rằng dãy $(x_n)_{n=0}^{+\infty}$ hội tụ và tìm giới hạn của dãy.

LỜI GIẢI Dễ thấy $x_n \geq \varepsilon > 0$, $\forall n \geq 1$ (với ε là số thực dương rất nhỏ). Ta có

$$\begin{aligned}
|x_{n+3} - 9| &= \left|(\sqrt{x_{n+2}} - 3) + (\sqrt{x_{n+1}} - 3) + (\sqrt{x_n} - 3)\right| \\
&\leq |\sqrt{x_{n+2}} - 3| + |\sqrt{x_{n+1}} - 3| + |\sqrt{x_n} - 3| \\
&= \frac{1}{\sqrt{x_{n+2}} + 3}|x_{n+2} - 9| + \frac{1}{\sqrt{x_{n+1}} + 3}|x_{n+1} - 9| + \frac{1}{\sqrt{x_n} + 3}|x_n - 9| \\
&\leq \frac{1}{3 + \varepsilon}|x_{n+2} - 9| + \frac{1}{3 + \varepsilon}|x_{n+1} - 9| + \frac{1}{3 + \varepsilon}|x_n - 9|, \ \forall n \geq 1
\end{aligned} \tag{1}$$

Theo bài toán tổng quát với dãy bị chặn dưới bởi 0, $k = 3$ và $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \in (0, 1)$, ta suy ra được dãy $(|x_n - 9|)$ hội tụ về 0 nên $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 9$. □

Giả sử ta đánh giá $x_n \geq 0$, $\forall n \geq 1$ thì dẫn đến trong đánh giá (1) ta có $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{1}{3}$, tức là $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$, lúc này nếu áp dụng bổ đề thì chỉ kết luận được dãy (x_n) hội tụ!

Ta có một cách giải khác như sau:

- Xây dựng dãy số $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$, $(b_1)_{n=1}^{+\infty}$ như sau:

  $$a_1 = a_2 = a_3 = \min\{x_1, x_2, x_3\}, \ a_{n+3} = \sqrt{a_{n+2}} + \sqrt{a_{n+1}} + \sqrt{a_n}, \ \forall n = 1, 2, \ldots$$
  $$b_1 = b_2 = b_3 = \max\{x_1, x_2, x_3\}, \ b_{n+3} = \sqrt{b_{n+2}} + \sqrt{b_{n+1}} + \sqrt{b_n}, \ \forall n = 1, 2, \ldots$$

- **Trường hợp 1:** $\min\{x_1, x_2, x_3\} \geq 9$. Ta có $a_1, a_2, a_3 \geq 9$. Giả sử a_{n+2}, a_{n+1}, a_n

cùng lớn hơn hoặc bằng 9. Khi đó

$$\begin{aligned}
a_{n+3} &= \sqrt{a_{n+2}} + \sqrt{a_{n+1}} + \sqrt{a_n} \geq \sqrt{9} + \sqrt{9} + \sqrt{9} = 9 \\
a_{n+4} &= \sqrt{a_{n+3}} + \sqrt{a_{n+2}} + \sqrt{a_{n+1}} \geq \sqrt{9} + \sqrt{9} + \sqrt{9} = 9 \\
a_{n+5} &= \sqrt{a_{n+4}} + \sqrt{a_{n+3}} + \sqrt{a_{n+2}} \geq \sqrt{9} + \sqrt{9} + \sqrt{9} = 9.
\end{aligned}$$

Vậy theo nguyên lý quy nạp suy ra $a_n \geq 9,\ \forall n = 1, 2, \ldots$

- Ta chứng minh $a_{n+1} \leq a_n$.

  Hiển nhiên mệnh đề đúng khi $n = 1, 2$. Ta có

  $a_4 = \sqrt{a_3} + \sqrt{a_2} + \sqrt{a_1} = 3\sqrt{a_3} \leq a_3$ (do $3\sqrt{a_3} - a_3 = \sqrt{a_3}(3 - \sqrt{a_3}) \leq 0$).

  Vậy mệnh đề đúng khi $n = 1, 2, 3$. Giả sử mệnh đề đúng khi $n = k, k + 1, k + 2$, tức là

  $$a_{k+1} \leq a_k,\ a_{k+2} \leq a_{k+1},\ a_{k+3} \leq a_{k+2}.$$

  Khi đó

  $$\begin{aligned}
  a_{k+4} &= \sqrt{a_{k+3}} + \sqrt{a_{k+2}} + \sqrt{a_{k+1}} \leq \sqrt{a_{k+2}} + \sqrt{a_{k+1}} + \sqrt{a_k} = a_{k+3} \\
  a_{k+5} &= \sqrt{a_{k+4}} + \sqrt{a_{k+3}} + \sqrt{a_{k+2}} \leq \sqrt{a_{k+3}} + \sqrt{a_{k+2}} + \sqrt{a_{k+1}} = a_{k+4} \\
  a_{k+6} &= \sqrt{a_{k+5}} + \sqrt{a_{k+4}} + \sqrt{a_{k+3}} \leq \sqrt{a_{k+4}} + \sqrt{a_{k+3}} + \sqrt{a_{k+2}} = a_{k+5}.
  \end{aligned}$$

  Vậy mệnh đề đúng với mọi $n = 1, 2, \ldots$ hay $a_{n+1} \leq a_n,\ \forall n = 1, 2, \ldots$

- Ta đã chứng minh được dãy (a_n) giảm và bị chặn dưới bởi 9. Do đó dãy (a_n) hội tụ. Đặt $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$ $(a \geq 9)$, khi đó ta được $a = 3\sqrt{a} \Leftrightarrow a = 9$. Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 9$.

- **Trường hợp 2:** $\min\{x_1, x_2, x_3\} < 9$. Tương tự ta chứng minh được dãy (a_n) tăng và bị chặn trên bởi 9 và $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 9$.

- Vậy trong tất cả trường hợp, dãy (a_n) đều hội tụ và $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 9$.

- Tiếp theo ta chứng minh $x_n \geq a_n$.

  Ta có $a_1 \leq x_1, a_2 \leq x_2, a_3 \leq x_3$. Vậy mệnh đề đúng khi $n = 1, 2, 3$. Giả sử mệnh đề đúng khi $n = k, k + 1, k + 2$ $(k \geq 1)$, tức là $x_k \geq a_k,\ x_{k+1} \geq a_{k+1},\ x_{k+2} \geq a_{k+2}$.

  Khi đó

  $$a_{k+3} = \sqrt{a_{k+2}} + \sqrt{a_{k+1}} + \sqrt{a_k} \leq \sqrt{x_{k+2}} + \sqrt{x_{k+1}} + \sqrt{x_k} = x_{k+3}.$$

  Vậy mệnh đề đúng với mọi $n = 1, 2, \ldots$ hay $x_n \geq a_n,\ \forall n = 1, 2, \ldots$

- Tương tự ta chứng minh được $x_n \leq b_n,\ \forall n = 1, 2, \ldots$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 9$.

- Vậy $a_n \leq x_n \leq b_n$, $\forall n = 1, 2, \ldots$, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 9$. Theo *nguyên lý kẹp* suy ra $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 9$.

Bài toán 4. *Cho dãy số dương* (u_n) *thỏa mãn*

$$u_{n+3} = \sqrt{u_n + u_{n+2}}, \ \forall n = 1, 2, \ldots$$

Chứng minh rằng dãy (u_n) *có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.*

Lời giải. Trước hết, ta chứng minh rằng tồn tại số tự nhiên n_0 để $u_{n_0} \geq 1$. Thật vậy, giả sử $u_n < 1$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Khi đó, từ công thức của dãy, ta có

$$\sqrt{u_n + u_{n+2}} = u_{n+3} < 1, \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Từ đó suy ra

$$u_{n+3} = \sqrt{u_n + u_{n+2}} > u_n + u_{n+2} > u_{n+2}, \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Điều này chứng tỏ dãy (u_n) tăng và bị chặn trên bởi 1 nên tồn tại $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$ với $0 < L \leq 1$. Tuy nhiên, khi chuyển phương trình ở đề bài sang giới hạn, ta lại thu được $L = 0$ hoặc $L = 2$ đều không thỏa mãn.
Như vậy, phải tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}^*$ sao cho $u_{n_0} \geq 1$. Khi đó, dễ thấy $u_{n_0+3}, u_{n_0+4}, u_{n_0+5} > 1$. Do ta cần tìm giới hạn của dãy (u_n) nên không mất tính tổng quát, ta có thể xem như dãy được bắt đầu từ ba số hạng này trở đi. Nghĩa là, ta có thể giả sử $u_1, u_2, u_3 > 1$.
Đến đây, lại sử dụng công thức truy hồi của dãy, ta suy ra $u_n > 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Từ đó, ta có

$$\begin{aligned} |u_{n+3} - 2| = \left|\sqrt{u_n + u_{n+2}} - 2\right| &= \frac{|u_n + u_{n+2} - 4|}{\sqrt{u_n + u_{n+2}} + 2} \\ &\leq \frac{|u_n - 2| + |u_{n+2} - 2|}{3}, \ \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

Đặt $v_n = |u_n - 2|$. Khi đó, ta có $v_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ và

$$v_{n+3} \leq \frac{v_n + v_{n+2}}{3} \leq \frac{1}{3}v_n + \frac{1}{6}v_{n+1} + \frac{1}{3}v_{n+2}. \tag{2}$$

Sử dụng kết quả bài toán tổng quát với trường hợp dãy bị chặn dưới bởi 0, $k = 3$ và $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \in (0, 1)$, ta thu được ngay $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ hay $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$. □

Trong đánh giá (2), ta đã "chen" hạng tử $\frac{1}{6}v_{n+1}$ vào với mục đích đưa về đúng "dạng" của bổ đề, và có thể đổi thành kv_{n+1} miễn là $0 < \frac{1}{3} + k + \frac{1}{3} < 1$.

Ngoài ra, ta có một hướng làm như sau (lời giải chi tiết xin dành cho bạn đọc):

- Ta xây dựng hai dãy số $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{+\infty}$ như sau:

$$\begin{cases} a_1 = \max\{u_1, u_2, u_3\} \\ a_{n+1} = \sqrt{2a_n}, \ \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases} ; \begin{cases} b_1 = \min\{u_1, u_2, u_3\} \\ b_{n+1} = \sqrt{2b_n}, \ \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

- Ta chứng minh dãy (a_n) giảm và $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 2$, dãy (b_n) tăng và $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 2$.

- Bằng quy nạp, ta cũng chứng minh được

$$b_n \leq \min\{u_{3n}, u_{3n+1}, u_{3n+2}\} \leq \max\{u_{3n}, u_{3n+1}, u_{3n+2}\} \leq a_n, \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

- Từ đó suy ra

$$\lim_{n\to+\infty} u_{3n} = \lim_{n\to+\infty} u_{3n+1} = \lim_{n\to+\infty} u_{3n+2} = 2,$$

  suy ra $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.

Bài toán 5. *(Việt Nam TST 1991) Cho dãy số (x_n) được xác định bởi $x_1 = x_4 = 1$, $x_2 = x_3 = 9$ và*

$$x_{n+4} = \sqrt[4]{x_n x_{n+1} x_{n+2} x_{n+3}}, \ \forall n \geq 1.$$

Chứng minh rằng dãy (x_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Lời giải. Từ giả thiết, ta có $x_n \geq 1, \ \forall n \geq 1$.
Xét dãy (a_n) xác định bởi $a_n = \log_3 x_n, \ \forall n \geq 1$. Ta có $a_1 = a_4 = 0, a_2 = a_3 = 2$ và

$$a_{n+4} = \frac{a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3}}{4}, \ \forall n \geq 1.$$

Khi đó, ta có

$$4a_{n+4} + 3a_{n+3} + 2a_{n+2} + a_{n+1} = 4a_{n+3} + 3a_{n+2} + 2a_{n+1} + a_n, \ \forall n \geq 1,$$

$$4a_{n+3} + 3a_{n+2} + 2a_{n+2} + a_{n+1} = 4a_4 + 3a_3 + 2a_2 + a_1 = 10, \ \forall n \geq 1.$$

Đặt $b_n = a_n - 1, \ \forall n \geq 1$. Ta có

$$4b_{n+3} + 3b_{n+2} + 2b_{n+1} + b_n = 0, \ \forall n \geq 1.$$

Điều này cho ta $4b_{n+2} + 3b_{n+1} + 2b_n + b_{n-1} = 0$, nên

$$b_{n+2} = -\frac{3b_{n+1} + 2b_n + b_{n-1}}{4}, \quad \forall n \geq 2,$$

từ đó suy ra

$$4b_{n+3} - \frac{3}{4}(3b_{n+1} + 2b_n + b_{n-1}) + 2b_{n+1} + b_n = 0,$$

hay tương đương với

$$b_{n+3} = \frac{1}{16}b_{n+1} - \frac{1}{8}b_n + \frac{3}{16}b_{n-1}, \ \forall n \geq 2.$$

Ta suy ra được

$$|b_{n+3}| \leq \frac{5}{8}|b_{n+2}| + \frac{1}{16}|b_{n+1}| + \frac{1}{8}|b_n| + \frac{3}{16}|b_{n-1}|, \ \forall n \geq 2.$$

Áp dụng bài toán tổng quát với trường hợp dãy bị chặn dưới bởi 0, $k = 4$ và $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \in (0, 1)$, ta được $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$. Vậy ta có $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$, suy ra $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 3$. □

Bài toán 6. *Cho số thực a và xét dãy số $\{x_n\}$ thỏa mãn*

$$x_1 = 1, \ x_2 = 0, \ x_{n+2} = \frac{x_n^2 + x_{n+1}^2}{4} + a, \ \forall n \geq 1.$$

a) Chứng minh rằng với $a = 0$ thì dãy $\{x_n\}$ hội tụ.

b) Tìm số thực a lớn nhất sao cho dãy $\{x_n\}$ hội tụ.

LỜI GIẢI

a) Ý này xin dành cho bạn đọc.

b) Giả sử dãy (x_n) hội tụ. Gọi L là giới hạn của dãy số thì L là nghiệm của phương trình

$$x = \frac{x^2}{2} + a \Leftrightarrow x^2 - 2x + 2a = 0.$$

Phương trình trên có nghiệm khi và chỉ khi $\Delta' = 1 - 2a \geq 0$, tức là $a \leq \frac{1}{2}$.

Khi $a = \frac{1}{2}$, ta có dãy (x_n): $x_1 = 1, \ x_2 = 0, \ x_{n+2} = \frac{x_n^2+x_{n+1}^2}{4} + \frac{1}{2}, \ \forall n \geq 1$.
Bằng quy nạp, ta chứng minh được rằng $x_n \in [0, 1], \ \forall n \geq 1$.
Suy ra

$$|x_{n+2} - 1| = \left|\frac{x_n^2 - 1}{4} + \frac{x_{n+1}^2 - 1}{4}\right| \leq \frac{1}{4}|x_n - 1| + \frac{1}{4}|x_{n+1} - 1|, \ \forall n \geq 1.$$

Áp dụng (5), ta có ngay $\lim\limits_{n\to+\infty} |x_n - 1| = 0$, hay $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$.

Vậy $\frac{1}{2}$ là giá trị lớn nhất của a để dãy (x_n) hội tụ.

□

Ngoài cách dùng bổ đề như trên, ta còn cách xét dãy số phụ như sau:

LỜI GIẢI

- Xét dãy số (u_n) xác định bởi

$$u_1 = 0,\ u_{n+1} = \frac{u_n^2+1}{2},\ \forall n \geq 1.$$

Khi đó, (u_n) là dãy tăng và $u_n \leq 1,\ \forall n \geq 1$ nên hội tụ. Giới hạn của dãy (u_n) là $L = 1$.

- Ta chứng minh rằng

$$u_n \leq \min\{x_{2n}, x_{2n-1}\},\ \forall n \geq 1.$$

Thật vậy, với $n = 1$ thì mệnh đề đúng. Giả sử bất đẳng thức đúng với $n = k$. Khi đó,

$$x_{2k+1} = \frac{x_{2k}^2 + x_{2k-1}^2}{4} + \frac{1}{2} \geq \frac{u_k^2 + u_k^2}{4} + \frac{1}{2} = u_{k+1},$$
$$x_{2k+2} = \frac{x_{2k+1}^2 + x_{2k}^2}{4} + \frac{1}{2} \geq \frac{u_{k+1}^2 + u_k^2}{4} + \frac{1}{2} \geq \frac{u_k^2}{2} + \frac{1}{2} = u_{k+1}.$$

do đó $u_{k+1} \leq \min\{x_{2k+1}, x_{2k+2}\}$, nghĩa là mệnh đề đúng với $n = k+1$. Vậy ta có mệnh đề đúng với mọi $n \geq 1$.

- Điều này cho ta

$$u_n \leq x_{2n}, x_{2n-1} \leq 1,\ \forall n \geq 1.$$

Với chú ý rằng $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ nên theo *nguyên lý kẹp*, ta có $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} x_{2n-1} = 1$, suy ra $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$.

□

Bài toán 7. *Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $u_1, u_2 \in (0,1)$ và*

$$u_{n+2} = \frac{1}{5}u_{n+1}^3 + \frac{4}{5}\sqrt[3]{u_n},\ \forall n = 1, 2, \ldots$$

Chứng minh rằng dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

LỜI GIẢI

Từ công thức truy hồi của dãy (u_n), ta dễ dàng suy ra $0 < u_n < 1,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$. Áp dụng bất đẳng thức *AM-GM*, ta được

$$\frac{1}{5}u_{n+1}^3 + \frac{4}{5}\sqrt[3]{u_n} \geq \sqrt[5]{u_{n+1}^3 \cdot \left(\sqrt[3]{u_n}\right)^4} = u_{n+1}^{\frac{3}{5}} u_n^{\frac{4}{15}}.$$

Từ đó suy ra

$$u_{n+2} \geq u_{n+1}^{\frac{3}{5}} u_n^{\frac{4}{15}},\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Lấy *logarit nepe* hai vế rồi đặt $v_n = -\ln u_n$, khi đó do $0 < u_n < 1$ nên

$v_n > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$ và

$$v_{n+2} \leq \frac{3}{5}v_{n+1} + \frac{4}{15}v_n,\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Áp dụng (5), ta có ngay $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$, suy ra $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$. □

Nếu đánh giá trực tiếp như sau thì ta sẽ không thể áp dụng được bổ đề!

$$\begin{aligned}
1 - u_{n+2} &= \frac{1}{5}\left(1 - u_{n+1}^3\right) + \frac{4}{5}\left(1 - \sqrt[3]{u_n}\right) \\
&= \frac{1}{5}(1 - u_n)\left(u_n^2 + u_{n+1} + 1\right) + \frac{4}{5} \cdot \frac{1 - u_n}{\sqrt[3]{u_n^2} + \sqrt[3]{u_n} + 1} \\
&\leq \frac{3}{5}(1 - u_{n+1}) + \frac{4}{5}(1 - u_n),\ \forall n \geq 1.
\end{aligned}$$

Bài toán 8. *Cho dãy số $\{x_n\}$ xác định bởi*

$$x_1, x_2 > 0 \text{ và } x_{n+2} = \sqrt[2022]{x_{n+1}} + \sqrt[2021]{x_n} \text{ với mọi } n \geq 1.$$

Chứng minh rằng dãy $\{x_n\}$ có giới hạn hữu hạn.

LỜI GIẢI Dễ thấy $x_n > 0,\ \forall n \geq 1$. Xét hai trường hợp sau:

- Nếu $x_n \in (0, 1),\ \forall n \geq 1$, ta chứng minh (x_n) là dãy tăng ngặt.
  Thật vậy, do khi đó ta có $x_n < \sqrt[2022]{x_n}$ nên

  $$x_{n+2} - x_{n+1} = \left(\sqrt[2022]{x_{n+1}} - x_{n+1}\right) + \sqrt[2021]{x_n} > \sqrt[2021]{x_n} > 0,\ \forall n \geq 1.$$

  Vậy theo định lý *Weierstrass*, ta suy ra dãy (x_n) hội tụ nên có giới hạn hữu hạn.

- Nếu $x_n \geq 1,\ \forall n \geq 1$, với L là số thỏa mãn $L = \sqrt[2022]{L} + \sqrt[2021]{L}$, ta có

  $$\begin{aligned}
  |x_{n+2} - L| &= \left|\left(\sqrt[2022]{x_{n+1}} - \sqrt[2022]{L}\right) + \left(\sqrt[2021]{x_n} - \sqrt[2021]{L}\right)\right| \\
  &\leq \left|\left(\sqrt[2022]{x_{n+1}} - \sqrt[2022]{L}\right)\right| + \left|\left(\sqrt[2021]{x_n} - \sqrt[2021]{L}\right)\right|,\ \forall n \geq 1.
  \end{aligned}$$

  Xét hàm số $f(x) = \sqrt[2022]{x}$ liên tục và khả vi trên $[1, +\infty)$. Theo định lý *Lagrange*, tồn tại $\xi \in (x_{n+1}, L)$ sao cho $|f(x_{n+1}) - f(L)| = f'(\xi)|x_{n+1} - L|$, suy ra

  $$\begin{aligned}
  \left|\sqrt[2022]{x_{n+1}} - \sqrt[2022]{L}\right| = \frac{1}{2022\sqrt[2022]{\xi^{2021}}}|x_{n+1} - L| &< \frac{1}{2022\sqrt[2022]{x_{n+1}^{2021}}}|x_{n+1} - L| \\
  &\leq \frac{1}{2022}|x_{n+1} - L|.
  \end{aligned}$$

Tương tự, ta cũng có

$$\left| \sqrt[2021]{x_{n+1}} - \sqrt[2021]{L} \right| < \frac{1}{2021}|x_n - L|.$$

Tóm lại,

$$|x_{n+2} - L| < \frac{1}{2022}|x_{n+1} - L| + \frac{1}{2021}|x_n - L|,\ \forall n \geq 1.$$

Áp dụng (5) , ta có ngay $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = L$.

Cuối cùng, ta chứng minh L tồn tại duy nhất, tức là chứng minh $g(x) = \sqrt[2022]{x} + \sqrt[2021]{x} - x$ có nghiệm duy nhất trên $[1, +\infty)$. Ta có

$$g'(x) = \frac{1}{2022\sqrt[2022]{x^{2021}}} + \frac{1}{2021\sqrt[2021]{x^{2020}}} - 1,$$
$$g''(x) = -\frac{2021}{2022^2\sqrt[2022]{x^{4043}}} - \frac{2020}{2021^2\sqrt[2021]{x^{4041}}} < 0,\ \forall x \geq 1.$$

Suy ra $g'(x)$ nghịch biến trên $[1, +\infty)$ mà $g'(1) < 0$ nên $g(x)$ nghịch biến trên $[1, +\infty)$.

Lại có $g(1) = 1$ nên $g(x)$ sẽ có một nghiệm duy nhất $x = L$ $(L > 1)$ trên $[1, +\infty)$.

□

Bài toán 9. *(Việt Nam TST 1990) Cho bốn số thực dương a, b, A, B. Xét dãy số thực (x_n) được xác định bởi $x_1 = a, x_2 = b$ và*

$$x_{n+2} = A\sqrt[3]{x_{n+1}^2} + B\sqrt[3]{x_n^2},\ \forall n = 1, 2, \ldots$$

Chứng minh rằng dãy (x_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Lời giải. Để cho các lý luận và biến đổi được thuận tiện, ta đặt $x_n = (A+B)^3 u_n$ và $\alpha = \frac{A}{A+B}, \beta = \frac{B}{A+B}$. Khi đó, ta có $\alpha + \beta = 1$ và

$$u_{n+2} = \alpha\sqrt[3]{u_{n+1}^2} + \beta\sqrt[3]{u_n^2},\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Đặt $M = \min\{u_1, u_2, 1\}$. Ta sẽ chứng minh $u_n \geq M,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$. Ta chứng minh bằng quy nạp theo n.
Dễ thấy khẳng định đúng với $n = 1, 2$.
Giả sử khẳng định đúng với $n = k$ $(k \geq 2)$. Khi đó, theo giả thiết quy nạp, ta có

$$u_{k+1} = \alpha\sqrt[3]{u_k^2} + \beta\sqrt[3]{u_{k-1}^2} \geq \alpha\sqrt[3]{M^2} + \beta\sqrt[3]{M^2} = \sqrt[3]{M^2} \geq M.$$

Do đó, khẳng định cũng đúng với $n = k + 1$. Theo nguyên lý quy nạp, ta có khẳng định đúng với mọi n. Bây giờ, đặt $v_n = |u_n - 1|$, ta có

$$\begin{aligned}|u_{n+2} - 1| &= \alpha \left|\sqrt[3]{u_{n+1}^2} - 1\right| + \beta \left|\sqrt[3]{u_n^2} - 1\right| \\ &= \frac{\alpha(u_{n+1}+1)}{u_{n+1}^{\frac{4}{3}} + u_{n+1}^{\frac{2}{3}} + 1}|u_{n+1} - 1| + \frac{\beta(u_n+1)}{u_n^{\frac{4}{3}} + u_n^{\frac{2}{3}} + 1}|u_n - 1| \\ &\leq \frac{\alpha(u_{n+1}+1)}{2u_{n+1}+1}|u_{n+1} - 1| + \frac{\beta(u_n+1)}{2u_n+1}|u_n - 1|.\end{aligned}$$

Do $f(t) = \frac{t+1}{2t+1}$ nghịch biến trên $\mathbb{R}^+$ nên dễ thấy

$$\frac{u_{n+1}+1}{2u_{n+1}+1}, \frac{u_n+1}{2u_n+1} \leq \frac{M+1}{2M+1} < 1, \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Do đó, từ bất đẳng thức trên, ta suy ra

$v_{n+2} \leq \alpha_1 v_n + \alpha_2 v_{n+1}$, $\forall n = 1, 2, \ldots$, trong đó $\alpha_1 = \dfrac{\beta(M+1)}{2M+1}, \alpha_2 = \dfrac{\alpha(M+1)}{2M+1}$.

Áp dụng (5), ta thu được $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$. Từ đó suy ra $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = (A + B)^3$. □

Bài toán 10. *Cho dãy số $(u_n)_{n=1}^{+\infty}$ xác định bởi*

$$\begin{cases} u_1, u_2 > 0 \\ u_{n+1} = \frac{n+1}{2n}\sqrt{u_n+2} + \frac{n-1}{3n}u_{n-1} + \frac{1}{3}, \ \forall n \geq 2. \end{cases}$$

Chứng minh (u_n) có giới hạn và tìm giới hạn đó.

Lời giải. Ta có

$$\begin{aligned}|u_{n+1} - 2| &= \left|\frac{n+1}{2n}\left(\sqrt{u_n+2} - 2\right) + \frac{n-1}{3n}(u_{n-1} - 2) + \frac{1}{3} + \frac{n+1}{n} + \frac{2(n-1)}{3n} - 2\right| \\ &\leq \frac{n+1}{2n}\left|\sqrt{u_n+2} - 2\right| + \frac{n-1}{3n}|u_{n-1} - 2| + \frac{1}{3n} \\ &\leq \frac{n+1}{2n}\frac{|u_n - 2|}{\sqrt{u_n+2}+2} + \frac{n-1}{3n}|u_{n-1} - 2| + \frac{1}{3n} \\ &\leq \frac{3}{8}|u_n - 2| + \frac{1}{3}|u_{n-1} - 2| + \frac{1}{3n}, \ \forall n \geq 2.\end{aligned}$$

$$\left(\text{do } \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \leq \frac{3}{4}, \ \sqrt{u_n+2} \geq 2, \ \frac{n-1}{3n} \leq \frac{1}{3}, \ \forall n \geq 2\right).$$

Áp dụng (6), ta có ngay $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - 2| = 0$ hay $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$. □

Bài toán 11. *Cho $\{a_n\}$ thỏa $\lim\limits_{n\to+\infty}(2a_{n+1} - a_n) = l$. Chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = l$.*

LỜI GIẢI | Xét $y_n = 2a_{n+1} - a_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$.
Ta có

$$|a_{n+1} - l| = \left|\frac{1}{2}(a_n - l) + \frac{1}{2}(y_n - l)\right| \le \frac{1}{2}|a_n - l| + \frac{1}{2}|y_n - l|,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Vì $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2}|y_n - l| = 0$ nên áp dụng (7), ta suy ra được $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = l$. □

Riêng trường hợp $l = 0$: *Cho dãy số $\{a_n\}_{n=0}^{+\infty}$ thỏa $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(a_{n+1} - \frac{a_n}{2}\right) = 0$. Chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ (Đề thi vô địch toàn Liên Xô).* Khi đó ta có hướng giải quyết khác như sau:

- Với mỗi $\varepsilon > 0$, vì $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(a_n - \frac{a_{n-1}}{2}\right) = 0$ nên tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}^*$ sao cho

$$\left|a_n - \frac{a_{n-1}}{2}\right| < \varepsilon,\ \forall n \ge n_0.$$

- Với $\varepsilon > 0$ ở trên, tồn tại $k \in \mathbb{N}^*$ sao cho $\frac{|a_{n_0}|}{2^k} < \varepsilon$. Khi đó với mọi số tự nhiên $m > n_0 + k$, ta có

$$\begin{aligned}|a_m| &= \left|\left(a_m - \frac{a_{m-1}}{2}\right) + \frac{a_{m-1}}{2}\right| \le \left|a_m - \frac{a_{m-1}}{2}\right| + \frac{1}{2}|a_{m-1}| < \varepsilon + \frac{1}{2}|a_{m-1}| \\ &< \varepsilon + \frac{1}{2}\left(\varepsilon + \frac{1}{2}|a_{m-2}|\right) = \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{2^2}|a_{m-2}| < \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{2^2}\left(\varepsilon + \frac{1}{2}|a_{m-3}|\right) \\ &= \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2^2} + \frac{1}{2^3}|a_{m-3}| < \cdots < \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2^2} + \cdots + \frac{\varepsilon}{2^{m-n_0-1}} + \frac{1}{2^{m-n_0}}|a_{n_0}| \\ &< \varepsilon\frac{1 - \frac{1}{2^{m-n_0}}}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{|a_{n_0}|}{2^k} = \varepsilon\left(2 - \frac{1}{2^{m-n_0-1}}\right) + \frac{|a_{n_0}|}{2^k} < 2\varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon.\end{aligned}$$

- Như vậy, ta đã chứng minh được $\forall\varepsilon > 0,\ \exists n_1 = (n_0 + k) \in \mathbb{N}^*$, sao cho, với mọi $n > n_1$ ta có $|a_n| < 3\varepsilon$. Sử dụng *định nghĩa giới hạn*, ta suy ra $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Bài toán 12. *(VMO 2022) Cho a là một số thực không âm và dãy số (u_n) xác định bởi*

$$u_1 = 6,\ u_{n+1} = \frac{2n + a}{n} + \sqrt{\frac{n + a}{n}u_n + 4},\ \forall n \ge 1.$$

(a) Với $a = 0$, chứng minh rằng (u_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

(b) Với mọi $a \ge 0$, chứng minh rằng (u_n) có giới hạn hữu hạn.

LỜI GIẢI | Ta sẽ chứng minh dãy (u_n) sẽ hội tụ về 5 với mọi $a \ge 0$.

Dễ thấy $u_n > 0,\ \forall n \geq 1$. Ta biến đổi như sau:

$$\begin{aligned}
|u_{n+1} - 5| &= \left| \left(\frac{2n+a}{n} - 2 \right) + \left(\sqrt{\frac{n+a}{n} u_n + 4} - 3 \right) \right| \\
&\leq \left| \frac{2n+a}{n} - 2 \right| + \left| \sqrt{\frac{n+a}{n} u_n + 4} - 3 \right| \\
&= \frac{a}{n} + \frac{\frac{n+a}{n}|u_n - 5| + \frac{5a}{n}}{\sqrt{\frac{n+a}{n} u_n + 4} + 3} \\
&\leq \frac{a}{n} + \frac{n+a}{5n}|u_n - 5| + \frac{a}{n} \\
&\leq \frac{2}{5}|u_n - 5| + \frac{2a}{n},\ \forall n \geq \max\{a, 1\}.
\end{aligned}$$

Áp dụng (7), ta có ngay $\lim\limits_{n \to +\infty} |u_n - 5| = 0$, hay $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 5$ với mọi $a \geq 0$. □

Bằng quy nạp dễ dàng chứng minh được $u_n > 5,\ \forall n \geq 1$, nhưng ta chỉ chọn $u_n > 0$ để thuận tiện trong việc đánh giá.

Bài toán 13. *(VMO 2017) Cho a là một số thực và xét dãy số (u_n) xác định bởi*

$$u_1 = a,\ u_{n+1} = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{2n+3}{n+1} u_n + \frac{1}{4}},\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

(a) Khi $a = 5$, chứng minh rằng dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

(b) Tìm tất cả các giá trị của số a để dãy số (u_n) xác định và có giới hạn hữu hạn.

Lời giải

Ta thấy dãy (u_n) xác định khi và chỉ khi u_2 xác định, mà $u_2 = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{2}a + \frac{1}{4}}$ nên u_2 xác định khi và chỉ khi $a \geq -\frac{1}{10}$. Ta sẽ chứng minh dãy (u_n) hội tụ về 3 với mọi $a \geq -\frac{1}{10}$.

Ta có đánh giá sau:

$$\begin{aligned}
|u_{n+1} - 3| &= \left| \sqrt{\frac{2n+3}{n+1} u_n + \frac{1}{4}} - \frac{5}{2} \right| = \left| \frac{\frac{2n+3}{n+1}(u_n - 3) + \frac{3}{n+1}}{\sqrt{\frac{2n+3}{n+1} u_n + \frac{1}{4}} + \frac{5}{2}} \right| \\
&\leq \frac{\frac{2n+3}{n+1}}{\sqrt{\frac{2n+3}{n+1} u_n + \frac{1}{4}} + \frac{5}{2}} |u_n - 3| + \frac{\frac{3}{n+1}}{\sqrt{\frac{2n+3}{n+1} u_n + \frac{1}{4}} + \frac{5}{2}}
\end{aligned}$$

Chú ý rằng với mọi $n \geq 2$ thì $u_n > 0$ và $\frac{2n+3}{n+1} < \frac{5}{2}$, ta có

$$\frac{\frac{2n+3}{n+1}}{\sqrt{\frac{2n+3}{n+1} u_n + \frac{1}{4}} + \frac{5}{2}} < \frac{\frac{5}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{5}{2}} = \frac{5}{6} \quad \text{và} \quad \frac{\frac{3}{n+1}}{\sqrt{\frac{2n+3}{n+1} u_n + \frac{1}{4}} + \frac{5}{2}} < \frac{\frac{3}{n+1}}{\frac{1}{2} + \frac{5}{2}} = \frac{1}{n+1}.$$

Do đó, kết hợp với đánh giá ở trên, ta thu được

$$|u_{n+1}-3| \leq \frac{5}{6}|u_n-3| + \frac{1}{n+1}, \ \forall n \geq 2.$$

Áp dụng (7), ta có ngay $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - 3| = 0$, hay $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$ với mọi $a \geq -\frac{1}{10}$. □

Bài toán 14. *(VMO 2015) Cho a là số thực không âm và (u_n) là dãy số xác định bởi*

$$u_1 = 3, \ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{n^2}{4n^2+a}\sqrt{u_n^2+3} \text{ với mọi } n \geq 1.$$

(a) Với $a = 0$, chứng minh rằng dãy số có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

(b) Với mọi $a \in [0; 1]$, chứng minh rằng dãy số có giới hạn hữu hạn.

Lời giải Bằng quy nạp, dễ dàng chứng minh được $0 \leq u_n \leq 3, \ \forall n \geq 1$.
Ta sẽ chứng minh dãy (u_n) hội tụ về 1 với mọi $a \geq 0$. Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} u_{n+1} - 1 &= \frac{1}{2}(u_n-1) + \frac{n^2}{4n^2+a}\sqrt{u_n^2+3} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}(u_n-1) + \frac{1}{4}\left(\sqrt{u_n^2+3}-2\right) - \frac{a}{4\left(4n^2+a\right)}\sqrt{u_n^2+3} \\ &= (u_n-1)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\frac{u_n+1}{\sqrt{u_n^2+3}+2}\right) - \frac{a}{4\left(4n^2+a\right)}\sqrt{u_n^2+3}. \end{aligned}$$

Khi đó,

$$\begin{aligned} |u_{n+1}-1| &\leq |u_n-1|\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\frac{u_n+1}{\sqrt{u_n^2+3}+2}\right) + \frac{a}{4\left(4n^2+a\right)}\sqrt{u_n^2+3} \\ &\leq |u_n-1|\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}+2}\right) + \frac{a\sqrt{3}}{2(4n^2+a)}, \ \forall n \geq 1. \end{aligned}$$

Áp dụng (7), ta có ngay $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - 1| = 0$, hay $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ với mọi $a \geq 0$. □

Ta thấy bổ đề 3 đã giải quyết tương đối nhẹ nhàng các bài toán trên. Ngoài cách dùng bổ đề, tác giả xin giới thiệu bạn đọc một hướng tiếp cận khác cũng vô cùng hiệu quả và tự nhiên cho dãy số dạng $x_{n+1} = f(x_n, n)$, đó là dùng định lý *Weierstrass*. Tuy nhiên, trong một số tình huống, nếu như không chắc chắn về sự tăng giảm của dãy số (có thể do không tính được chính xác các giá trị đầu tiên), hay không nhận ra được "chặn trên" của dãy, ta có thể sử dụng một kỹ thuật như sau, tôi sẽ lấy **Bài toán 11** làm ví dụ:

- Bằng quy nạp, dễ dàng chứng minh được $u_n > 5,\ \forall n \geq 1$.
- Chú ý rằng $f(n) = \frac{n+a}{n} = 1 + \frac{a}{n}$ là hàm giảm trên $\mathbb{R}^+$ với mọi $a \geq 0$ và $n \in \mathbb{N}^*$.
- Nếu tồn tại một số $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $u_{n_0} \geq u_{n_0+1}$ thì ta có

$$\begin{aligned} u_{n_0+2} &= \left(2 + \frac{a}{n_0+1}\right) + \sqrt{\left(1 + \frac{a}{n_0+1}\right) u_{n_0+1} + 4} \\ &\leq \left(2 + \frac{a}{n_0}\right) + \sqrt{\left(1 + \frac{a}{n_0}\right) u_{n_0} + 4} = u_{n_0+1}. \end{aligned}$$

  Chứng minh tương tự, ta có $u_{n_0} \geq u_{n_0+1} \geq u_{n_0+2} \geq u_{n_0+3} \geq \ldots$ Điều này có nghĩa là dãy (u_n) không tăng kể từ n_0 trở đi. Đồng thời, dãy này cũng bị chặn dưới (bởi 5) nên theo định lý *Weierstrass*, tồn tại giới hạn $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$ $(L \geq 5)$. Khi đó, $L = 2 + \sqrt{L+4}$.

  Giải phương trình này, ta được $L = 5$. Tóm lại, nếu tồn tại n_0 như trên thì $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 5$.

- Tiếp theo, ta sẽ xét trường hợp số n_0 như trên không tồn tại, nói cách khác (u_n) là dãy tăng ngặt. Ta sẽ chứng minh (u_n) bị chặn trên. Thật vậy, ta có đánh giá

$$\begin{aligned} & 2 + \frac{a}{n} + \sqrt{\left(1 + \frac{a}{n}\right) u_n + 4} = u_{n+1} > u_n \\ \Leftrightarrow\ & \sqrt{\left(1 + \frac{a}{n}\right) u_n + 4} > u_n - \frac{a}{n} - 2 > 3 - \frac{a}{n} \\ \Leftrightarrow\ & \left(1 + \frac{a}{n}\right) u_n + 4 > \left(u_n - \frac{a}{n} - 2\right)^2,\ \forall n > \frac{a}{3} \geq 0 \\ \Leftrightarrow\ & u_n^2 - \left(\frac{3a}{n} + 5\right) u_n + \frac{a^2}{n^2} + \frac{4a}{n} < 0 \\ \Leftrightarrow\ & 5 < u_n < \frac{5 + \frac{3a}{n} + \sqrt{\frac{5a^2}{n^2} + \frac{14a}{n} + 25}}{2},\ \forall n \geq 1. \end{aligned}$$

  Theo *nguyên lý kẹp*, ta suy ra $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 5$.

- Vậy với mọi $a \geq 0$ thì dãy (u_n) hội tụ về 5.

Cách làm này có thể áp dụng gần như tương tự cho **Bài toán 12**, **Bài toán 13**, bạn đọc có thể làm thử để luyện tập.

Bài toán 15. *Cho dãy số (S_n) với $S_n = \dfrac{n+1}{a^{n+1}} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{a^k}{k}$, $a > 1$. Chứng minh rằng (S_n) có giới hạn hữu hạn và tính giới hạn đó.*

LỜI GIẢI Ta có

$$S_{n+1} = \frac{n+2}{a^{n+2}} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{a^k}{k} = \frac{n+2}{a^{n+2}} \left(a + \frac{a^2}{2} + \cdots + \frac{a^{n+1}}{n+1} \right)$$
$$= \frac{n+2}{a(n+1)} \cdot \frac{n+1}{a^{n+1}} \left(a + \frac{a^2}{2} + \cdots + \frac{a^n}{n} \right) + \frac{n+2}{a(n+1)}$$
$$= \frac{n+2}{a(n+1)} S_n + \frac{n+2}{a(n+1)}.$$

Với mỗi $a > 1$, ta lại có

$$\left| S_{n+1} - \frac{1}{a-1} \right| = \left| \frac{n+2}{a(n+1)} \left(S_n - \frac{1}{a-1} \right) + \frac{1}{(a-1)(n+1)} \right|$$
$$\leq \frac{2}{a+1} \left| S_n - \frac{1}{a-1} \right| + \frac{1}{(a-1)(n+1)}, \ \forall n \geq \max\left\{ 2, \left[\frac{2}{a-1} \right] \right\}.$$

Lưu ý rằng với $a > 1$ thì $\frac{2}{a+1} \in (0, 1)$, $\frac{1}{(a-1)(n+1)} > 0$ và $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{(a-1)(n+1)} = 0$ nên áp dụng bổ đề 3, ta thu được $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \frac{1}{a-1}$, với mỗi $a > 1$. □

Ngoài cách giải trên, ta còn một cách phổ biến cho dãy tổng:

- Đặt $\begin{cases} x_n = a + \frac{a^2}{2} + \ldots + \frac{a^n}{n} \\ y_n = \frac{a^{n+1}}{n} \end{cases} \quad (n \geq 1).$

- Ta chứng minh (y_n) là dãy tăng thật sự tới $+\infty$.

  Thật vậy,
  $$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{na}{n+1} > 1, \ \forall n \geq \left[\frac{1}{a-1} \right] + 1.$$

  Lại có

  $$y_n > \frac{a^n}{n} = \frac{[1 + (a-1)]^n}{n} > \frac{\binom{n}{2}.(a-1)^2}{n} = \frac{(n-1)(a-1)^2}{2} \to +\infty \text{ (khi } n \to +\infty).$$

- Mặt khác,

  $$\lim_{n \to +\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{a^n}{n}}{\frac{a^{n+1}}{n} - \frac{a^n}{n-1}} = \frac{1}{a-1}.$$

- Do đó, theo định lý *Stolz*, ta có $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{1}{a-1}$.

Bài toán 16. *Cho dãy số (x_n) xác định bởi*

$$\begin{cases} x_1 = \frac{7}{3}, \\ x_{n+1} = \sqrt{x_n^3 - 12x_n + \frac{20n+21}{n+1}}, \ \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy (x_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

LỜI GIẢI Dễ thấy $x_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
Nếu đặt $g(x) = x^3 - 12x + 20,\ h(x) = x^3 - 12x + \frac{41}{2}$ thì

$$g(x) < x^3 - 12x + \frac{20n+21}{n+1} < h(x),\ \forall x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}^*.$$

Ta có

$$g(x) = (x+4)(x-2)^2 + 4 \geq 4,\ \forall x \geq 0.$$

Do đó $x_{n+1} > \sqrt{g(x_n)} \geq \sqrt{4} = 2,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$, mà $x_1 \geq 2$ nên $x_n \geq 2,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.
Mặt khác, $h'(x) = 3x^2 - 12,\ h'(x) \geq 0,\ \forall x \geq 2$, dẫn đến

$$h(x) < h(x_1) = \frac{281}{54} < \frac{49}{9} = x_1^2,\ \forall x \in [2, x_1].$$

Bằng quy nạp, ta sẽ chứng minh $2 \leq x_n \leq x_1,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.
Dễ thấy mệnh đề đúng với $n = 1$. Giả sử mệnh đề đúng với $n = k\ (k \geq 1)$, tức là $2 \leq x_k \leq x_1$.
Khi đó $x_{k+1} < \sqrt{h(x_k)} < \sqrt{x_1^2} = x_1$. Vậy $2 \leq x_n \leq \frac{7}{3},\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.
Ta có đánh giá sau:

$$\begin{aligned}
4(x_{n+1} - 2) &\leq (x_{n+1} + 2)(x_{n+1} - 2) = x_{n+1}^2 - 4 \\
&= \left(x_n^3 - 12x_n + 16\right) + \frac{1}{n+1} \\
&\leq (x_n + 4)(x_n - 2)^2 + \frac{1}{n+1} \\
&\leq \left(\frac{7}{3} + 4\right)\left(\frac{7}{3} - 2\right)(x_n - 2) + \frac{1}{n+1} \\
&\leq \frac{19}{9}(x_n - 2) + \frac{1}{n+1},\ \forall n \in \mathbb{N}^*.
\end{aligned}$$

Suy ra

$$x_{n+1} - 2 \leq \frac{19}{36}(x_n - 2) + \frac{1}{4(n+1)},\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Áp dụng bổ đề 3, ta có $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n - 2) = 2$, hay $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$. □

3. Bài tập rèn luyện

Xét dãy (u_n) được xác định bởi $u_1 = u_2 = 1$ và

$$u_{n+2} = \frac{2u_{n+1} + u_n}{5},\quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Chứng minh rằng dãy (u_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Cho $k \geq 2$ là số nguyên dương cho trước và dãy (u_n) thỏa mãn $u_1, u_2, u_3 \in (0,1)$,

$$u_{n+3} = \frac{u_{n+2}^k + u_n^k}{3},\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Cho dãy số thực dương (u_n) thỏa

$$\begin{cases} u_1 = \frac{4}{3},\ u_2 = 4, \\ u_{n+2} = 1 + \frac{u_{n+1}}{u_n},\ \forall n \geq 1. \end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy (u_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Cho dãy số thực (a_n) được xác định bởi

$$\begin{cases} a_1 = \frac{1}{3},\ a_2 = \frac{2}{7} \\ a_{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{a_n}{3} + \frac{a_{n-1}^2}{6},\ \forall n = 2, 3, \ldots \end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy (a_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Xét dãy (u_n) cho bởi công thức

$$\begin{cases} u_1 = \frac{2016}{2017},\ u_2 = \frac{2017}{2016}, \\ u_{n+2} = \frac{u_{n+1}+2}{u_n+2},\ \forall n \geq 1. \end{cases}$$

(1) Chứng minh dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

(2) Chứng minh $\sqrt{n+2}-2 < \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i=3}^{n} \frac{1}{\sqrt{iu_i}} < \sqrt{n-1}-1$, với mọi giá trị $n \geq 4$.

Cho dãy số (x_n) thỏa mãn $x_1 = 1, x_2 = 2014$ và

$$x_{n+2} = \sqrt[3]{x_{n+1}^3 x_n},\ \forall n = 1, 2, \ldots$$

Chứng minh rằng dãy (x_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

(Romanian TST 2004) Tìm tất cả các đơn ánh $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ thỏa mãn

$$f(f(n)) \leq \frac{f(n)+n}{2},\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Dãy (x_n) được xác định bởi $x_1 = \frac{4}{5}, x_2 = \frac{9}{10}$ và

$$x_{n+2} = \sqrt{x_{n+1}} + \sqrt[3]{x_n},\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

Cho $a, b \in (0, 1)$. Dãy số (u_n) xác định như sau:

$$\begin{cases} u_0 = a,\ u_1 = b \\ u_{n+2} = \frac{1}{2010}u_{n+1}^4 + \frac{2009}{2010}\sqrt[4]{u_n},\ \forall n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy (u_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Cho $a, b \in (0, 4)$ và dãy số $\{x_n\}$:

$$\begin{cases} x_0 = a,\ x_1 = b \\ x_{n+2} = \frac{2(x_{n+1}+x_n)}{\sqrt{x_{n+1}}+\sqrt{x_n}},\ \forall n \geq 0. \end{cases}$$

Tìm giới hạn của dãy số này nếu có.

Cho dãy (x_n) thỏa mãn $x_1 = x_2 = x_3 = \frac{1}{2}$ và

$$x_{n+3} = \frac{1}{18}x_{n+2}^3 + \frac{1}{18}x_{n+1}^2 + \frac{8}{9}\sqrt[3]{x_n},\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

Cho dãy số $(u_n)_{n=0}^{+\infty}$ thỏa mãn:

$$\begin{cases} u_0 = 1, u_1 = 3, \\ u_{n+1}^2 + 4u_{n+1} = u_n + u_{n-1} + 2\sqrt{u_n+2}\sqrt{u_{n-1}+2},\ \forall n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Chứng minh rằng $(u_n)_{n=0}^{+\infty}$ có giới hạn hữu hạn. Tìm giới hạn đó.

Cho dãy số (u_n) xác định như sau:

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{3},\ u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+2} = \frac{1}{4}u_{n+1}^2 + \frac{3}{4}\sqrt{u_n},\ \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Cho dãy số (x_n) thỏa mãn $x_1, x_2 > 0$ và

$$x_{n+2} = \frac{2}{x_{n+1} + x_n + 2},\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

Cho dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ xác định bởi

$$x_1 = 2,\ x_2 = 3,\ x_{n+1} = \frac{n+1}{2n}x_n + \frac{n-2}{3n}x_{n-1} + \frac{1}{6}\ \forall n \geq 2.$$

Chứng minh rằng $\{x_n\}$ có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_1 = u_2 = \frac{1}{2} \\ u_{n+2} = \frac{1}{1+u_n} + \frac{1}{2}\sqrt{2 - u_{n+1}},\ n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$.

Chứng minh rằng dãy số đã cho có giới hạn hữu hạn. Tìm giới hạn đó.

Dãy số (x_n) thỏa

$$\begin{cases} u_1 = \frac{15}{8},\ u_2 = 2 \\ u_{n+2} + \frac{1}{2} = \sqrt{u_{n+1}^2 + u_n + \frac{n^2}{4n^2-1}},\ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

Tính giới hạn dãy đã cho.

(VMO 2012) Cho dãy số thực (x_n) xác định bởi

$$x_1 = 3 \text{ và } x_n = \frac{n+2}{3n}(x_{n-1} + 2) \text{ với mọi } n \geq 2.$$

Chứng minh rằng dãy số đã cho có giới hạn hữu hạn khi $n \to +\infty$. Tìm giới hạn đó.

Cho dãy $\{x_n\}$ được xác định

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2011}{2010} \\ x_{n+1} = x_n^2 - 2x_n + \frac{2n+4999}{n+2499}\ (n \in \mathbb{N}^*). \end{cases}$$

Chứng minh dãy $\{x_n\}$ hội tụ và tìm giới hạn đó.

Cho dãy $x_{n+1} = \frac{n+3}{n+1}\left(\sqrt{x_n+3} + \sqrt[3]{x_n}\right),\ x_1 > 1$. Tính giới hạn dãy đã cho.

Cho $a > 2$ và dãy số (x_n) với

$$\begin{cases} x_1 = a \\ 2x_{n+1} = \sqrt{3x_n^2 + \frac{n+3}{n}}\ \ (n \in \mathbb{N}^*) \end{cases}.$$

(1) Chứng minh $x_n > 1,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

(2) Chứng minh dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Cho $a \in [0, 1]$ và dãy số $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ được xác định bởi

$$u_1 = 1,\ u_{n+1} = \frac{n-a}{6n}u_n + \sqrt{\frac{n+a}{6n}\left(u_n^2 + u_n\right) + 18},\ \forall n \geq 1.$$

Chứng minh rằng $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Cho dãy số (x_n) xác định bởi

$$\begin{cases} x_1 = 4 \\ x_{n+1} = \frac{n+1}{3n}.\sqrt{x_n^2 + nx_n + 2n^2} + \frac{2n^2+3n+1}{x_n+5n}. \end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy (y_n) xác định bởi $y_n = \frac{x_n}{n+1}$, $\forall n \geq 1$ có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Cho dãy số (x_n) xác định bởi $x_1 = 1,\ x_{n+1} = \sqrt{\frac{n+2022}{n} + \ln x_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Tính $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n$.

Cho dãy số thực $\{a_n\}$ thỏa $\{2a_{n+1} + \sin a_n\}$ hội tụ. Chứng minh rằng $\{a_n\}$ hội tụ.

Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = \frac{4}{3};\ u_2 = \frac{3}{4}, \\ u_{n+2} = \frac{u_{n+1}^3 + u_n + a}{4},\ \forall n \geq 1. \end{cases}$

Tìm giá trị lớn nhất của a để dãy số (u_n) hội tụ.

Cho a là số thực dương. Xét hai dãy số $(x_n), (y_n)$ được xác định như sau:

$$x_1 = \sqrt{3},\ y_1 = a,\ x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n},\ y_{n+1} = \frac{x_n y_n}{y_n + 1} \text{ với mọi số nguyên dương } n.$$

Chứng minh rằng dãy số (y_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Tài liệu

[1] Huỳnh Phước Trường, *Một số phương pháp tìm giới hạn của dãy số*, Trường Đại học Sư phạm TP. HCM.

[2] Lê Văn Chánh, *Chuỗi bài giảng về Bổ đề giới hạn*, Trường Đại học Khoa học Tự nhiên TP. HCM, 2022.

[3] Nguyễn Tài Chung, *Bồi dưỡng học sinh giỏi - Chuyên khảo Dãy số*, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội, 2019.

[4] Nguyễn Hoàng Vinh, *Chuyên đề Trường hè Toán học: Một số phương pháp tính giới hạn dãy số*, Trường THPT Chuyên Lương Thế Vinh - Đồng Nai, 2019.

[5] Trần Nam Dũng (Chủ biên), *Các kỳ thi Toán VMO - Lời giải và bình luận*, Tủ sách Sputnik, số 022, 2017.

[6] Trần Quốc Luật, *Sử dụng đánh giá trung gian để tìm giới hạn dãy số*, Tạp chí Toán học & Tuổi trẻ, số 460, 2015.

[7] Võ Quốc Bá Cẩn, *Giới hạn của một dãy số dạng trung bình và ứng dụng*, Tạp chí Toán học & Tuổi trẻ, số 452, 2015.

[8] Võ Giang Giai và Nguyễn Ngọc Thu, *Một số bài toán về dãy số trong các đề thi Olympic 30-4*, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội, 2006.

GIỚI THIỆU TRÒ CHƠI THÁP HÀ NỘI

Tạ Duy Phượng (Cộng tác viên Viện Toán học)
Vũ Hoàng Đạo (Trường Trung học Phổ thông Xuân Huy, Tuyên Quang)
Mao Thị Thu Hiền (Cao đẳng Sư phạm Hà Tây)
Trần Thị Hồng Nhung (Trường Trung học Phổ thông Hòn Gai, Thành phố Hạ Long)
Vũ Thu Trang (Trường Trung học Phổ thông Hòn Gai, Thành phố Hạ Long)

Giới thiệu. *Trò chơi (Bài toán) Tháp Hà Nội được nhà toán học Edouard Lucas phát minh và phổ biến rộng rãi ở Paris năm 1883, là một trò chơi, cũng là bài toán, nổi tiếng thế giới, hiện đang được nghiên cứu và phát triển bởi rất nhiều nhà toán học và khoa học máy tính, các chuyên gia giáo dục và y học, được đưa vào nhiều sách về trò chơi toán học, sách toán học giải trí và các giáo trình tin học như một ví dụ điển hình về thuật giải đệ qui và độ phức tạp tính toán.*

Trò chơi Tháp Hà Nội không chỉ thú vị ở chỗ nó mang tên Hà Nội, thủ đô của Việt Nam. Bài toán Tháp Hà Nội hấp dẫn các nhà nghiên cứu Toán học và Tin học bởi nó liên quan đến nhiều vấn đề của Toán-Tin học như giải thuật đệ qui, hệ đếm, tam giác Pascal, thảm Sierpinski, lý thuyết đồ thị và chu trình Hamilton, ôtômát hữu hạn, độ phức tạp tính toán, ... Bài toán Tháp Hà Nội gợi ý cho nhiều nghiên cứu mới trong toán học và khoa học máy tính.

Chỉ tính riêng số bài báo nghiên cứu về bài toán Tháp Hà Nội trong lĩnh vực Toán học và Tin học đã có đến gần 500 bài với khoảng 250 bài có đầu đề với cụm từ "The Tower of Hanoi"(Tháp Hà Nội), đăng trên gần 200 tạp chí khoa học uy tín (xem Tài liệu trích dẫn [34], [6-10]). Đó là chưa kể đến những bài viết về sử dụng bài toán Tháp Hà Nội trong khoa học giáo dục và y học hoặc những cuốn sách về tin học và toán học giải trí, trong đó có trình bày về trò chơi Tháp Hà Nội.

Trò chơi Tháp Hà Nội thú vị và có ý nghĩa nên nó đã được dùng làm đề tài của một số luận văn Thạc sĩ, xem, thí dụ, [37], [6-10] và được viết thành hai quyển sách [21], [26]. Hai hội thảo khoa học quốc tế với tên gọi Workshop on the Tower of Hanoi and Related Problems, Slovenia, 2005, [39] và Symposium La "Tour d'Hanoi"-un casse-tete mathématique d'E'duard Lucas (1842-1891), Institute Henri Poicaré, Pháp, 2009 [36] đã được tổ chức.

Mặc dù trò chơi Tháp Hà Nội có mặt trên khá nhiều trang WEB và giáo trình tin học tiếng Việt, số lượng bài viết tiếng Việt giới thiệu về trò chơi và bài toán Tháp Hà Nội trên các tạp chí là rất ít và còn rất sơ lược (xem [1]-[5]). Hình như chưa có bài nghiên cứu tiếng Việt nào về bài toán Tháp Hà Nội, ngoại trừ một số luận văn cao học [6-10].

Nhân kỉ niệm 140 năm trò chơi Tháp Hà Nội ra đời, chúng tôi viết bài này với mục đích trình bày tổng quan về bài toán Tháp Hà Nội cùng một số vấn đề toán học liên quan. Bài viết gồm hai phần. Phần 1 giới thiệu tổng quan về lịch sử phát triển trò chơi Tháp Hà Nội. Phần 2 trình bày Lời giải bài toán Tháp Hà Nội cho ba cọc bằng các công cụ khác nhau (thuật giải đệ qui, hệ đếm cơ số 2, đồ thị).

Sau hơn 100 năm, trò chơi Tháp Hà Nội đã có những cải biên và tổng quát hóa (trò chơi Tháp Hà Nội với nhiều cọc, trò chơi Tháp Hà Nội với các đĩa màu, trò chơi Tháp Hà Nội với hạn chế hướng chuyển đĩa, trò chơi Tháp Hà Nội xoay vòng, trò chơi Tháp Hà Nội song song,...). Những cải biên và tổng quát hóa này dẫn đến những vấn đề toán học thú vị, thậm chí dẫn tới nhiều bài toán chưa có lời giải. Bài viết cũng sơ lược giới thiệu các mở rộng và cải biên khác nhau này của bài toán Tháp Hà Nội.

PHẦN I

Trò chơi Tháp Hà Nội

1. Lịch sử trò chơi Tháp Hà Nội

Dựa trên truyền thuyết về tháp Brahma (có thể cũng do chính E. Lucas nghĩ ra, xem [25], [28] và các tư liệu khác), và có thể, dựa theo hình mẫu những ngôi tháp cổ đã từng tồn tại trong vùng đất phật giáo linh thiêng gần Hà Nội (Bắc Ninh?, xem [28]), hoặc cũng có thể vì lí do nào đó khác, nhà toán học nổi tiếng người Pháp Edouard Lucas đã phổ biến *Trò chơi Tháp Hà Nội* ở Paris năm 1883 dưới tên giả (under the nickname) là giáo sư N. Claus. Năm 1884, de Parvile trong [27] đã tiết lộ, giáo sư N. Claus chính là tên giả của Eduard Lucas.

Hình 1. Chùa Bút Tháp (Bắc Ninh).

Theo E. Lucas, trò chơi Tháp Hà Nội "đã xuất hiện ở Đông Á từ thế kỷ 19 hoặc trước đó. Các đĩa được làm bằng sứ ở Trung Quốc, Nhật Bản và Đông Kinh (Tonkin-Bắc Kì)". Tuy nhiên, cho tới nay, các nhà lịch sử và khảo cổ vẫn chưa tìm thấy các thư tịch viết về truyền thuyết 64 đĩa vàng với ba cọc kim cương tại tháp Brahma của Ấn độ cũng như các đĩa sứ của trò chơi tháp Hà Nội tại Trung Quốc, Nhật Bản và Việt Nam, Cũng chưa ai nhìn thấy cuốn sách FER-FER-TAM-TAM 'sắp xuất bản" mà Lucas nhắc tới. Những hộp đựng trò chơi cũ nhất vẫn là hộp đựng các đĩa sản xuất tại Pháp năm 1883 và những năm sau đó.

Hình 2. Các hộp đựng trò chơi Tháp Hà Nội tại Bảo tàng lịch sử trò chơi Paris.

Trên bìa của hộp đựng trò chơi sản xuất năm 1883 và trong cuốn sách *L'Arithméique Amusante* xuất bản năm 1895, chính Edouard Lucas đã viết ([25], trang 179): "...la Tour d'Hanoi, véritable casse-tête annamite..." (Tháp Hà Nội, một trò chơi trí tuệ của người Annam), nhưng tại sao Ông lại gọi trò chơi này là *trò chơi Tháp Hà Nội* và tại sao lại là *trò chơi trí tuệ của người Annam* thì chưa có câu trả lời thật rõ ràng.

Tác giả của [1] viết: "nhà toán học đến thăm Việt Nam, ngắm cảnh Hồ Gươm và bị quyến rũ bởi vẻ đẹp của Tháp Rùa nên đã đặt tên là Bài toán Tháp Hà Nội". Tuy nhiên, tháp Rùa xây năm 1886, còn *trò chơi Tháp Hà Nội* đã xuất hiện ở Paris từ năm 1883. Khi ấy (năm 1883) E. Lucas đã ra khỏi quân đội và đang dạy học ở Paris, nên giả thuyết Lucas đã gọi Tháp Rùa là Tháp Hà Nội là không có cơ sở.

Một giả thuyết nữa là Cột cờ Hà Nội đã gợi ý cho E. Lucas đặt tên trò chơi của mình là trò chơi tháp Hà Nội: "The Flag Tower of Hanoi may have served as the inspiration for the name" [28]. Cột cờ Hà Nội có đáy gồm ba khối vuông xây chồng lên nhau. Trò chơi tháp Hà Nội đơn giản nhất cũng gồm ba đĩa tròn

1


xếp chồng lên nhau trên một cột. Cột cờ Hà Nội xây năm 1805-1812, hơn 70 năm trước khi trò chơi tháp Hà Nội được phổ biến. Năm 1882 Pháp tấn công và chiếm thành Hà Nội lần thứ hai. Đề tài Hà Nội và Đông Dương là thời sự trên các báo và phòng trà ở Paris vào những năm 1882-1883. Năm 1883 cũng là năm Pháp phát hành tín phiếu lấy tiền xây dựng Nhà thờ lớn (trên nền của tháp Báo Thiên và chùa Báo Thiên). Phải chăng điều này gợi ý E. Lucas đặt tên cho trò chơi của mình là trò chơi Tháp Hà Nội?

Dưới đây là bìa của hộp đựng trò chơi Tháp Hà Nội sản xuất lần đầu tiên tại Paris năm 1883 và hai tờ hướng dẫn qui tắc chơi. Đây là những tư liệu quí về lịch sử trò chơi. Dựa trên phân tích hình vẽ trên hộp đựng trò chơi, "bờ thành của tháp được mô tả tỉ mỉ đến từng chi tiết, người nông dân Annam vẽ rất thực,...", có người cho rằng, thật sự đã có người bạn của E. Lucas mang các thông tin và trò chơi này từ Hà Nội về Paris. Cũng không hẳn là không có lí! Tuy nhiên, tác giả của [3] cho rằng người trên bụng có chữ A.U. là E. Lucas thì có lẽ là một sai lầm (So sánh với ảnh E. Lucas bên dưới).

Trên tờ bìa có hình tháp 10 tầng, cây tre, người Annam và dòng chữ: "La Tour d'Hanoï, Veritable casse-téte Annamite - Jeu, rapporté du Tonkin par le professeur N. Claus (de Siam) du college Mandarin Li-Sou-Stian" - Tháp Hà Nội, Trò chơi trí tuệ của người Annam, được mang về từ Bắc Kì bởi giáo sư N. Claus (của Siam), trường trung học Li-Sou-Stian. (N. Claus de Siam là đảo ngữ của E. Lucas d'Amiens, Amiens là quê của E. Lucas. Li-Sou-Sian là đảo ngữ của Sant Louis, trường trung học ở Paris, nơi Ông dạy học vào những năm đó).

Hình 3. Trò chơi tháp Hà Nội là mô phỏng ngôi tháp tại Hà Nội - hình ảnh của tháp Báo thiên? (Ảnh: Bảo tàng thuộc địa, Marseille, Pháp)

Bản dịch tờ hướng dẫn thứ nhất của trò chơi Tháp Hà Nội được sản xuất lần đầu:

THÁP HÀ NỘI

Trò chơi trí tuệ của Annam

Trò chơi được đem về từ Đông Kinh

bởi Giáo sư N. CLAUS (DE SIAM)

Trường Cao đẳng Li-Sou-Stian!

Trò chơi này được tìm thấy, lần đầu, trong cuốn sách tiếng Quan thoại có minh họa FER-FER-TAM-TAM, đang được xuất bản, trong tương lai gần, bởi chính phủ Trung Hoa. Tháp Hà Nội có các đĩa, nhỏ dần, có số lượng thay đổi, mà chúng tôi làm bằng gỗ, có lỗ ở giữa. Ở Nhật Bản, Trung Quốc, và ở Đông Kinh, chúng được làm bằng sứ.

Trò chơi có mục đích là dỡ bỏ các đĩa, và đặt vào cột bên cạnh, theo các qui tắc nhất định. Vui và bổ ích, dễ học và dễ chơi trong thành phố, ngoài nông thôn, trên chuyến du lịch, nó được tạo ra để mang đến kiến thức khoa học, giống mọi trò chơi kỳ thú và mới lạ của giáo sư N. CLAUS (của SIAM).

Chúng tôi trao giải thưởng 1000 franc, 100 nghìn franc, một triệu franc, và nhiều hơn, cho ai hoàn thành, bằng việc dùng tay di chuyển tháp Hà Nội với

Hình 4. Bìa của hộp đựng trò chơi Tháp Hà Nội được bán lần đầu tại Paris, 1883

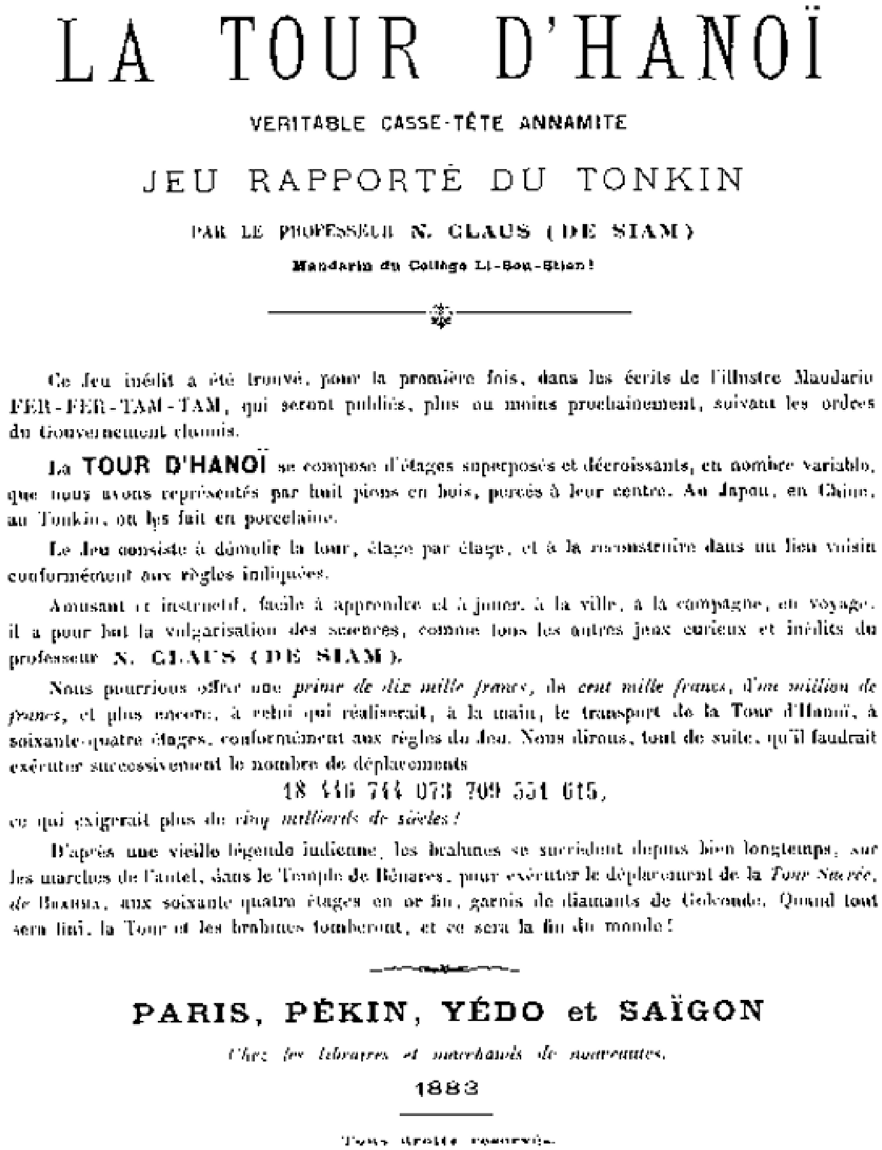
64 đĩa, theo quy tắc của trò chơi. Chúng tôi nói ngay là cần số lần di chuyển là: 18 446 744 073 709 551 615, nhiều hơn năm tỷ thế kỷ! Theo một truyền thuyết Ấn Độ, những người Brahmin đã tiếp nối nhau trong một thời gian dài để di chuyển 64 đĩa vàng của Tòa tháp Brahma trong Đền Bernares. Khi công việc hoàn thành, Tòa tháp và Brahma sẽ đổ, và lúc đó là thời điểm kết thúc của vũ trụ!

PARIS, BẮC KINH, TOKYO và SÀI GÒN

Trong các hiệu sách và tiểu thuyết

1883

Bản quyền đã giữ.



LA TOUR D'HANOÏ

VERITABLE CASSE-TÊTE ANNAMITE

JEU RAPPORTÉ DU TONKIN

PAR LE PROFESSEUR N. CLAUS (DE SIAM)

Mandarin du Collège Li-Sou-Stian!

Ce Jeu inédit a été trouvé, pour la première fois, dans les écrits de l'illustre Mandarin FER-FER-TAM-TAM, qui seront publiés, plus ou moins prochainement, suivant les ordres du Gouvernement chinois.

La **TOUR D'HANOÏ** se compose d'étages superposés et décroissants, en nombre variable, que nous avons représentés par huit pions en bois, percés à leur centre. Au Japon, en Chine, au Tonkin, on les fait en porcelaine.

Le Jeu consiste à démolir la tour, étage par étage, et à la reconstruire dans un lieu voisin conformément aux règles indiquées.

Amusant et instructif, facile à apprendre et à jouer, à la ville, à la campagne, en voyage, il a pour but la vulgarisation des sciences, comme tous les autres jeux curieux et inédits du professeur **N. CLAUS (DE SIAM)**.

Nous pourrions offrir une *prime de dix mille francs*, de *cent mille francs*, *d'un million de francs*, et plus encore, à celui qui réaliserait, à la main, le transport de la Tour d'Hanoï, à soixante-quatre étages, conformément aux règles du Jeu. Nous dirons, tout de suite, qu'il faudrait exécuter successivement le nombre de déplacements

18 446 744 073 709 551 615,

ce qui exigerait plus de *cinq milliards de siècles!*

D'après une vieille légende indienne, les brahmes se succèdent depuis bien longtemps, sur les marches de l'autel, dans le Temple de Bénarès, pour exécuter le déplacement de la *Tour Sacrée de Brahma*, aux soixante-quatre étages en or fin, garnis de diamants de Golconde. Quand tout sera fini, la Tour et les brahmes tomberont, et ce sera la fin du monde!

PARIS, PÉKIN, YÉDO et SAÏGON

Chez les libraires et marchands de nouveautés.

1883

Bản dịch tờ hướng dẫn thứ hai của trò chơi Tháp Hà Nội được sản xuất lần đầu tại Paris:

Luật chơi và cách chơi trò chơi THÁP HÀ NỘI

Đế đặt nằm ngang; các cột thẳng đứng. Các đĩa đặt theo thứ tự từ lớn đến nhỏ từ thấp lên cao, tạo nên một Tòa tháp. Trò chơi đòi hỏi di chuyển các đĩa, bằng cách đặt chúng vào cột bên cạnh, một lần di chuyển một đĩa, theo luật sau:

I. Sau mỗi di chuyển, các đĩa đều nằm trên một, hai, hoặc ba cột, theo thứ tự từ lớn đến nhỏ từ thấp đến cao.

II. Đĩa trên cùng của một trong ba cột được đặt vào cột trống.

III. Đĩa trên cùng của một trong ba cột đĩa được đặt lên một cột đĩa khác, nếu đĩa này nhỏ hơn các đĩa của cột khác.

Trò chơi có thể dễ dàng tự khám phá, bằng việc giải quyết dần từ 3, 4, và 5 đĩa.

Trò chơi luôn giải được và đòi hỏi thời gian chơi lâu khoảng gấp đôi mỗi khi cho thêm một đĩa vào Tòa tháp. Bất kì ai giải được bài toán cho tám đĩa, ví dụ, chuyển các đĩa từ cột 1 sang cột 2, cũng sẽ biết cách giải bài toán cho chín đĩa. Chỉ cần chuyển tám đĩa sang cột 3, rồi chuyển đĩa thứ chín sang cột 2, và mang tám đĩa từ cột 3 về cột 2. Bây giờ, khi thêm một đĩa vào trò chơi, tổng số di chuyển tăng gấp đôi, cộng với một, so với trước.

Với tháp hai đĩa	ba lần chuyển là đủ	Số đĩa	Số lần chuyển
Ba đĩa	7 lần	6 đĩa	63 lần
Bốn đĩa	15 lần	7 đĩa	127 lần
Năm đĩa	31 lần	8 đĩa	255 lần

Với tốc độ một di chuyển mất một giây, cần bốn phút để chuyển tám đĩa.

Các biến thể của trò chơi: Có thể thay đổi đến vô cùng điều kiện của bài toán tháp Hà Nội như sau: Khi bắt đầu, xếp các đĩa theo thứ tự bất kỳ lên một, hai, hay cả ba cột. Sau đó cần xây dựng lại tòa tháp trên một cột định trước. Với 64 đĩa, số lần di chuyển là khổng lồ, số này dài 50 chữ số. Xem thêm chi tiết trong chương nói về Baguenaudier ở:

TOÁN HỌC GIẢI TRÍ

bởi Mr. Édouard Lucas

giáo sư toán học cao cấp tại Lycée Saint-Louis

Hai tập nhỏ, trong hai màu

Paris, 1883, bởi GAUTHER-VILLARS,

máy in của Académie des Sciences và Ecole Polytechnique

Dưới đây chúng tôi chụp lại bìa và bốn trang viết về Tháp Hà Nội trong cuốn sách *Số học vui* [25] của E.Lucas xuất bản năm 1895 (sau khi ông mất).

Trò chơi tháp Hà Nội vừa được phổ biến tại Paris năm 1883 đã được đón nhận rộng rãi vì sự đơn giản và hấp dẫn của nó. E. Lucas đã tỏ ra rất khôn khéo khi Ông cho sản xuất trò chơi tháp Hà Nội với 8 đĩa, số đĩa vừa đủ để trò chơi không quá đơn giản (để chuyển hết 8 đĩa từ cọc nguồn sang cọc đích, không nhầm lẫn, cần 255 bước), cũng như không quá phức tạp (như trong trường hợp 64 đĩa, phải mất 5 tỉ năm).

Règles et pratique du Jeu de la TOUR D'HANOÏ

On dispose la tablette horizontalement ; on passe les clous de bas en haut, dans les trous de la tablette. Puis, on superpose les huit pions ou étages, dans l'ordre décroissant de la base au sommet ; on a construit la **Tour**.

Le Jeu consiste à déplacer celle-ci, en enfilant les étages sur un autre clou et en ne déplaçant qu'un seul étage à la fois, conformément aux règles suivantes :

I. — Après chaque coup, les étages seront toujours enfilés sur un, deux, ou trois clous, suivant l'ordre décroissant de la base au sommet.

II. — On peut enlever l'étage supérieur d'une des trois piles d'étages, pour l'enfiler dans un clou n'ayant aucun étage.

III. — On peut enlever l'étage supérieur d'une des trois piles, et le placer sur une autre pile, à la condition expresse que l'étage supérieur de celle-ci soit plus grand.

Le Jeu s'apprend facilement seul, en résolvant d'abord le problème pour 3, 4, 5 étages.

Le Jeu est toujours possible et demande deux fois plus de temps chaque fois que l'on ajoute un étage à la tour. Si l'on sait résoudre le problème pour *huit* étages, par exemple, en transportant la tour du clou n° 1 au clou n° 2, on saura le résoudre pour *neuf* étages. On transporte d'abord les huit étages supérieurs sur le clou n° 3 ; puis le neuvième étage sur le clou n° 2 ; enfin on reportera les huit étages du clou n° 3 sur le clou n° 2. Donc, en augmentant la tour d'un étage, le nombre ~~des déplacements est~~ le *double plus un*, dans le jeu précédent.

Pour une tour de	**deux**	étages, il faut		**trois**	coups au minimum ;	
—	**trois**	—	—	**sept**	—	—
—	**quatre**	—	—	**quinze**	—	—
—	**5**	—	—	**31**	—	—
—	**6**	—	—	**63**	—	—
—	**7**	—	—	**127**	—	—
—	**8**	—	—	**255**	—	et ainsi de suite.

A un coup par seconde, il faut plus de quatre minutes pour déplacer la tour de huit étages.

Variations du Jeu. — On varie, à l'infini, les conditions du problème de la tour d'Hanoï, comme il suit. Au début, on enfile les étages, d'une manière quelconque, sur un, deux ou trois clous. Il faut reconstruire la tour sur l'un des clous, désigné à l'avance. Pour 64 étages le nombre des dispositions initiales est vertigineux ; il a plus de *cinquante* chiffres.

Pour plus de détails, consulter l'ouvrage suivant au chapitre du Baguenaudier :

RÉCRÉATIONS MATHÉMATIQUES

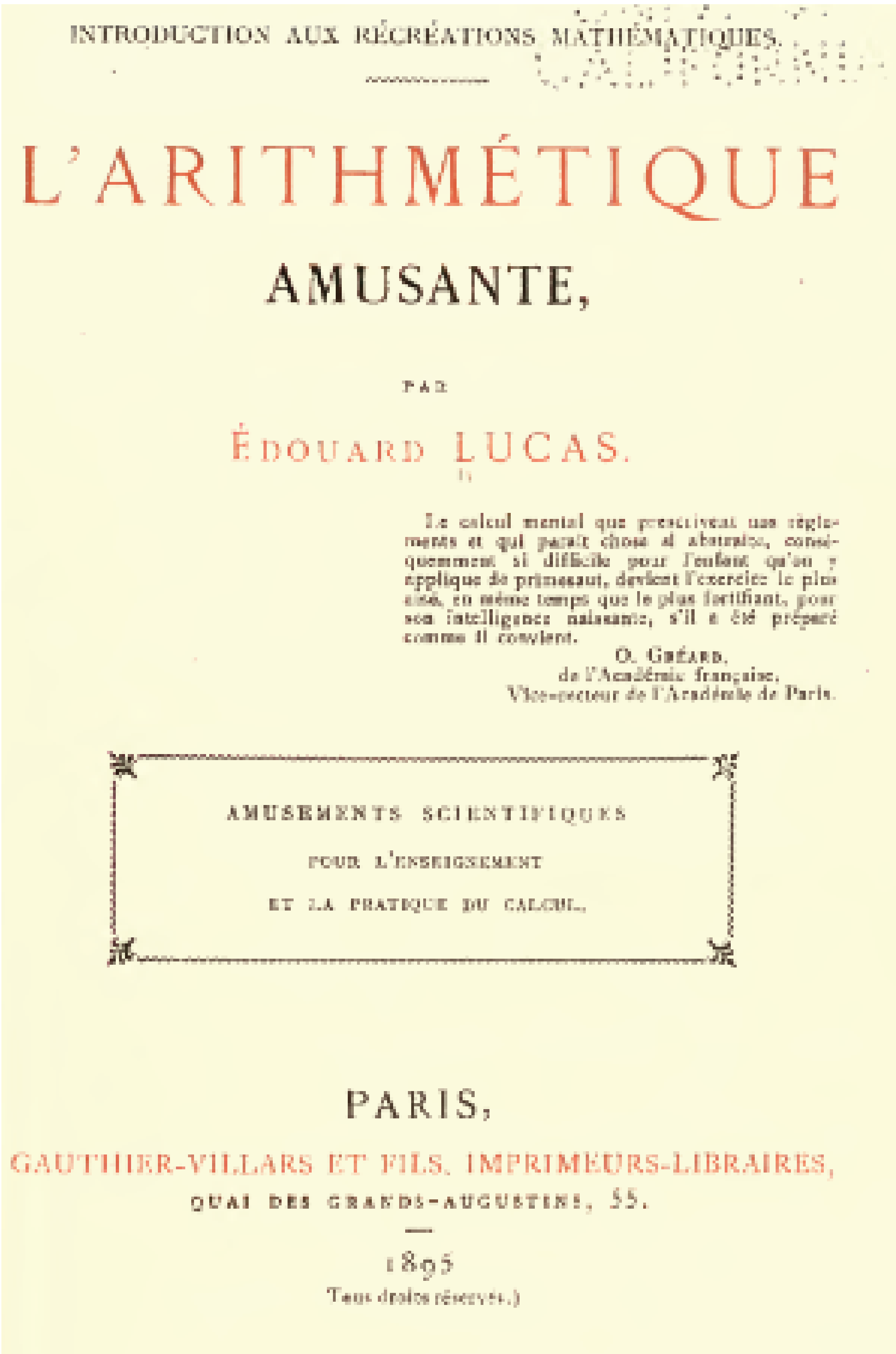
Par M. ÉDOUARD LUCAS, professeur de mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis

Deux volumes petit in-8, caractères elzévirs, titre en deux couleurs.

Paris, 1883, chez GAUTHIER-VILLARS, imprimeur-libraire de l'Académie des Sciences et de l'École Polytechnique
Quai des Augustins, 55.

[illegible]

Sau Paris, trò chơi Tháp Hà Nội được phổ biến ở nhiều nơi trên thế giới. Có lẽ W. W. Rouse Ball ([13], 1892) là người đầu tiên giới thiệu trò chơi tháp Hà Nội với độc giả tiếng Anh qua cuốn sách về trò chơi toán học: Mathematical Recreations and Essays.



INTRODUCTION AUX RÉCRÉATIONS MATHÉMATIQUES.

L'ARITHMÉTIQUE
AMUSANTE,

PAR

ÉDOUARD LUCAS.

Le calcul mental que prescrivent nos règlements et qui paraît chose si abstraite, conséquemment si difficile pour l'enfant qu'on y applique de primesaut, devient l'exercice le plus aisé, en même temps que le plus fortifiant, pour son intelligence naissante, s'il a été préparé comme il convient.

O. Gréard,
de l'Académie française,
Vice-recteur de l'Académie de Paris.

AMUSEMENTS SCIENTIFIQUES
POUR L'ENSEIGNEMENT
ET LA PRATIQUE DU CALCUL.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES,
QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.

1895

(Tous droits réservés.)

Hình 5. Bìa của cuốn sách của E. Lucas xuất bản tại Paris năm 1895, trong đó có 4 trang (179-183) viết về Trò chơi Hà Nội.

LA TOUR D'HANOÏ.

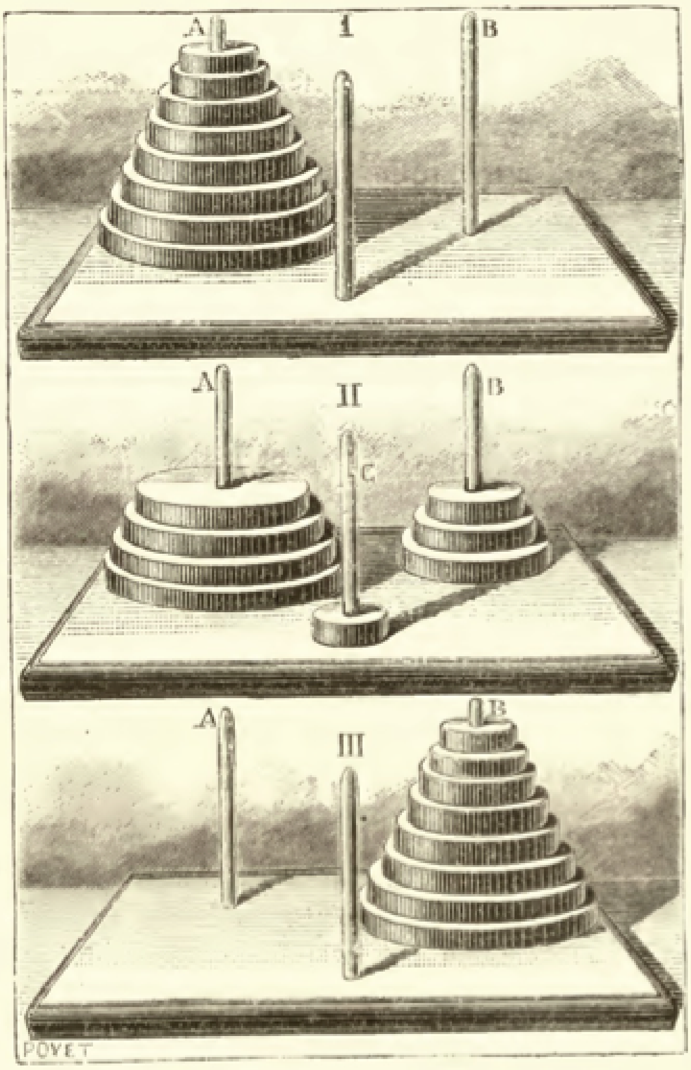
Un de nos amis, le professeur N. CLAUS (de Siam), mandarin du collège Li-Sou-Stian, a publié en 1884 un jeu inédit et breveté, qu'il a appelé la *Tour d'Hanoï*, véritable casse-tête annamite qu'il n'a pas rapporté du Tonkin, quoi qu'en dise le prospectus.

Hình 6. Trang 179-183: LA TOUR D'HANOï (Tháp Hà Nội)

180 *Chapitre quatrième.*

Cette tour (*fig.* 36) se compose d'étages superposés et décrois-

Fig. 36.



La tour d'Hanoï.

sants, en nombre variable, représentés par huit pions en bois percés à leur centre, et enfilés dans l'un des trois clous fixés sur

Hình 7. Trang 179-183: LA TOUR D'HANOï (Tháp Hà Nội)

une tablette. Le jeu consiste à déplacer la tour en enfilant les pions sur un des deux autres clous et en ne déplaçant qu'un seul étage à la fois, mais avec défense expresse de poser un étage sur un autre plus petit. Le jeu est toujours possible et demande deux fois plus de temps chaque fois que l'on ajoute un étage à la tour. En effet, si l'on sait résoudre le problème pour huit étages, par exemple, en transportant la tour du premier clou au second, on saura le résoudre pour neuf étages. On transporte d'abord les huit étages supérieurs sur le troisième clou; puis le neuvième étage sur le deuxième clou, et enfin sur celui-ci les huit premiers étages. Donc, en augmentant la tour d'un étage, le nombre des coups devient le double plus un. Ainsi :

Pour une	tour de	2	étages, il faut	3	coups, au	minimum,
»	»	3	»	7	»	»
»	»	4	»	15	»	»
»	»	5	»	31	»	»
»	»	6	»	63	»	»
»	»	7	»	127	»	»
»	»	8	»	255	»	»

A un coup par seconde, il faut plus de quatre minutes pour déplacer la tour de huit étages. Pour exécuter le transport de la tour d'Hanoï à 64 étages, il faudrait faire un nombre de déplacements égal à

18446744073709551615,

nombre des grains de blé de l'échiquier de Sessa, ce qui exigerait plus de *cinq milliards de siècles.*

Le mandarin N. Claus (de Siam) nous raconte qu'il a vu, dans

Hình 8. Trang 179-183: LA TOUR D'HANOÏ (Tháp Hà Nội)

ses voyages pour la publication des écrits de Fer-Fer-Tam-Tam, dans le grand temple de Bénarès, au-dessous du dôme qui marque le centre du monde, trois aiguilles de diamant, plantées dans une dalle d'airain, hautes d'une coudée et grosses comme le corps d'une abeille. Sur une de ces aiguilles Dieu enfila, au commencement des siècles, soixante-quatre disques d'or pur, le plus large reposant sur l'airain, et les autres de plus en plus étroits, superposés jusqu'au sommet ; c'est la tour sacrée de Brahma. Nuit et jour, les prêtres se succèdent sur les marches de l'autel, occupés à transporter la tour de la première aiguille de diamant sur la troisième, sans s'écarter des règles fixes que nous venons d'indiquer, et qui ont été posées par Brahma. Quand tout sera fini, la tour et les brahmes tomberont, et ce sera la fin des mondes !

Nous avons tenu à développer la théorie de ce jeu curieux et original qui représente, comme le baguenaudier et le Je-Kim, la formation des nombres dans le système binaire. On simplifie la manœuvre du jeu à l'aide de cette remarque intéressante, qui a été faite pour la première fois par le neveu de l'inventeur, M. Raoul Olive, élève du Lycée Charlemagne. Le disque le plus petit tourne toujours dans le même sens de deux en deux coups ; ceci permet de réussir toujours sans tâtonnements. Mais on peut compliquer le jeu en plaçant d'abord les huit étages dans un ordre quelconque sur les trois clous. En augmentant le nombre des tiges et en modifiant légèrement les règles du jeu, on obtiendrait facilement des représentations de tous les systèmes de numération. En nous servant des mêmes principes, nous avons pu trouver de nouveaux systèmes de serrures incrochetables pour la fermeture des coffres-forts.

L'industrie étrangère s'est emparée depuis peu du jeu de notre

Hình 9. Trang 179-183: LA TOUR D'HANOï (Tháp Hà Nội)

Les progressions géométriques. 183

ami et de sa légende; mais nous pouvons affirmer que le tout a été imaginé, il y a une dizaine d'années, au n° 56 de la rue Monge, à Paris, dans la maison habitée alors par M. Viette, ministre de l'Agriculture, et bâtie sur l'emplacement de celle où mourut Pascal, le 19 août 1662.

Hình 10. Trang 179-183: LA TOUR D'HANOï (Tháp Hà Nội)

First Edition, February, 1892.
Second Edition, May, 1892.
Third Edition, 1896.
Fourth Edition, 1905.
Fifth Edition, 1911.
Sixth Edition, 1914.

MATHEMATICAL
RECREATIONS AND ESSAYS

BY

W. W. ROUSE BALL,

FELLOW OF TRINITY COLLEGE, CAMBRIDGE.

SIXTH EDITION.

THE TOWER OF HANOÏ. I may mention next the ingenious puzzle known as the *Tower of Hanoï*. It was brought out in 1883 by M. Claus (Lucas).

Hình 11. Mathematical Recreations and Essays.

It consists of three pegs fastened to a stand, and of eight circular discs of wood or cardboard each of which has a hole in the middle through which a peg can be passed. These discs are of different radii, and initially they are placed all on one peg, so that the biggest is at the bottom, and the radii of the successive discs decrease as we ascend: thus the smallest disc is at the top. This arrangement is called the *Tower*. The problem is to shift the discs from one peg to another in such a way that a disc shall never rest on one smaller than itself, and finally to transfer the tower (*i.e.* all the discs in their proper order) from the peg on which they initially rested to one of the other pegs.

The method of effecting this is as follows. (i) If initially there are n discs on the peg A, the first operation is to transfer gradually the top $n-1$ discs from the peg A to the peg B, leaving the peg C vacant: suppose that this requires x separate transfers. (ii) Next, move the bottom disc to the peg C. (iii) Then, reversing the first process, transfer gradually the $n-1$ discs from B to C, which will necessitate x transfers. Hence, if it requires x transfers of simple discs to move a tower of $n-1$ discs, then it will require $2x+1$ separate transfers of single discs to move a tower of n discs. Now with 2 discs it requires 3 transfers, *i.e.* 2^2-1 transfers; hence with 3 discs the number of transfers required will be $2(2^2-1)+1$, that is, 2^3-1. Proceeding in this way we see that with a tower of n discs it will require 2^n-1 transfers of single discs to effect the complete transfer. Thus the eight discs of the puzzle will require 255 single transfers. It will be noticed that every alternate move

CH. X] MISCELLANEOUS PROBLEMS 229

consists of a transfer of the smallest disc from one peg to another, the pegs being taken in cyclical order: further if the discs be numbered consecutively 1, 2, 3, … beginning with the smallest, all those with odd numbers rotate in one direction, and all those with even numbers in the other direction.

De Parville gave an account of the origin of the toy which is a sufficiently pretty conceit to deserve repetition*. In the great temple at Benares, says he, beneath the dome which marks the centre of the world, rests a brass plate in which are fixed three diamond needles, each a cubit high and as thick as the body of a bee. On one of these needles, at the creation, God placed sixty-four discs of pure gold, the largest disc resting on the brass plate, and the others getting smaller and smaller up to the top one. This is the Tower of Bramah. Day and night unceasingly the priests transfer the discs from one diamond needle to another according to the fixed and immutable laws of Bramah, which require that the priest on duty must not move more than one disc at a time and that he must place this disc on a needle so that there is no smaller disc below it. When the sixty-four discs shall have been thus transferred from the needle on which at the creation God placed them to one of the other needles, tower, temple, and Brahmins alike will crumble into dust, and with a thunderclap the world will vanish. Would that other writers were in the habit of inventing equally interesting origins for the puzzles they produce!

The number of separate transfers of single discs which the Brahmins must make to effect the transfer of the tower is $2^{64}-1$, that is, is 18,446744,073709,551615: a number which, even if the priests never made a mistake, would require many thousands of millions of years to carry out.

E. I. Ignatiev có lẽ là người đầu tiên giới thiệu trò chơi tháp Hà Nội với độc giả người Nga trong cuốn sách Trong vương quốc sáng tạo hay Số học cho mọi người xuất bản lần thứ nhất năm 1902 (xem [40]). Ông đã gọi trò chơi này là "bài toán Bắc Kì". Không biết vì lí do gì, Ông cũng gọi bài toán này là "chiếc mũ Trung Hoa".

Xem: Bài toán 89: Tháp Hà Nội-Bài toán Bắc kì, trang 152-156 của cuốn sách [40] dưới đây.

Е. И. Игнатьевъ.

ВЪ ЦАРСТВѢ СМЕКАЛКИ

или

АРИѲМЕТИКА ДЛЯ ВСѢХЪ.

КНИГА ДЛЯ СЕМЬИ И ШКОЛЫ.

Книга первая

(4-е пересмотрѣнное изданіе).

Математического Коллежа НМУ

С.-ПЕТЕРБУРГЪ

1914

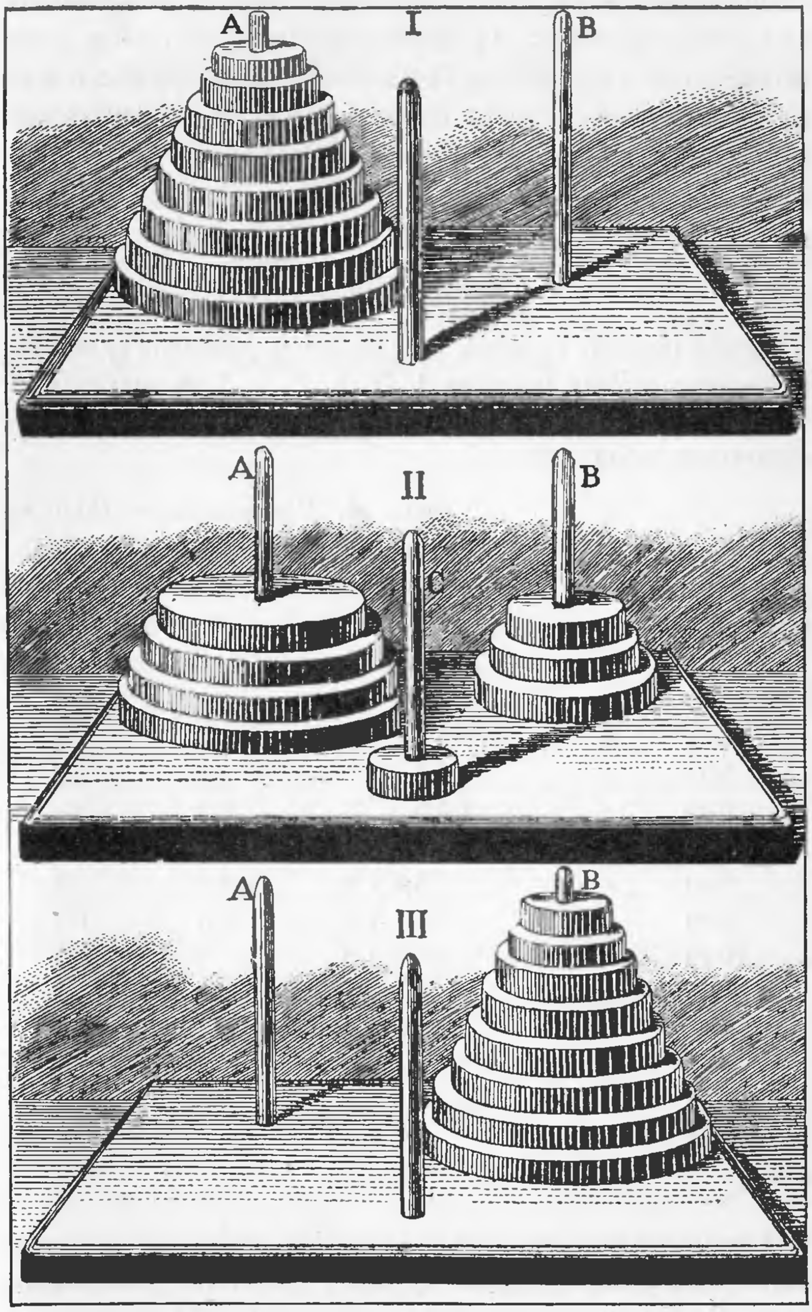
Задача 89-я.

Ханойская башня.—Тонкинскій вопросъ.

Возьмемъ 8 деревянныхъ, или изъ толстаго картона, кружковъ уменьшающагося діаметра и три вертикально укрѣпленныя на пластинкѣ палочки (стержня). Кружки снабжены въ центрѣ отверстіями, и ихъ накладываютъ, начиная съ наибольшаго, на одну изъ палочекъ А такъ, что получается родъ усѣченнаго конуса. Это и есть Ханойская башня въ 8 этажей. (См. фиг. 76, А, вверху).

Требуется всю эту башню съ палочки А перенести на палочку В, пользуясь третьей палочкой (I, II, и III на

153



Фиг. 76.

154

нашемъ рисункѣ), какъ вспомогательной, и соблюдая слѣдующія условія: 1) не переносить за одинъ разъ болѣе одного кружка и 2) класть снятый кружокъ или на ту палочку, которая свободна, или накладывать его на кружокъ большаго діаметра. Надѣвать на какую-либо изъ палочекъ большій кружокъ поверхъ меньшаго—нельзя.

Рѣшеніе.

Чтобы показать процессъ правильнаго перенесенія кружковъ, обозначимъ кружки цифрами 1, 2, 3, . . ., 7, 8, начиная съ наименьшаго; затѣмъ изобразимъ процессъ перенесенія нижеслѣдующей табличкой:

		Палочка А.	*Вспомогательная палочка.*	*Палочка В.*
до начала		1,2,3,4,5,6,7,8	—	—
послѣ 1-го перенесенія:		2,3,. . . . 8	1	—
» 2-го	»	3,4 . . . 8	1	2
» 3-го	»	3.4 . . . 8	—	1,2
» 4-го	»	4,5 . . 8	3	1,2
» 5-го	»	1,4,5,. . 8	3	2
» 6-го	»	1,4,5,. . 8	2,3	—
» 7-го	»	4,5,. . 8	1,2,3	—
» 8-го	»	5,6,7,8	1,2,3	4
» 9-го	»	5,6,7,8	2,3	1,4
» 10-го	»	2,5,6,7,8	3	1,4
» 11-го	»	1,2,5,6,7,8	3	4
» 12-го	»	1,2,5,6,7,8	—	3,4
» 13-го	»	2,5,6,7,8	1	3,4
» 14-го	»	5,6,7,8	1	2,3,4
» 15-го	»	5,6,7,8	—	1,2,3,4

и т д.

Отсюда мы видимъ, что на палочку III, когда она свободна, надѣваются только нечетные кружки (1-ый. 3-ій, 5-ый и пр.), а на *В*—только четные. Такъ что, напр., для перенесенія

155

четырехъ верхнихъ кружковъ, нужно было сперва перенести три верхніе на вспомогательную палочку — что, какъ видно изъ таблицы, потребовало 7 отдѣльныхъ переложеній, — затѣмъ мы перенесли 4-ый кружокъ на третью палочку — еще одно переложеніе — и, наконецъ, три верхніе кружка со второй палочки перенесли на ту же третью поверхъ 4-го кружка (при чемъ 1-ая палочка играла у насъ роль вспомогательной), что опять потребовало 7-ми отдѣльныхъ переложеній.

Итакъ, вообще: чтобы при такихъ условіяхъ перенести колонну изъ n какихъ нибудь элементовъ, расположенныхъ вертикально въ убывающемъ порядкѣ, нужно сначала перенесть колонну изъ $(n-1)$ верхнихъ элементовъ на одно изъ свободныхъ мѣстъ, потомъ основаніе, т. е. n-ный элементъ—на другое свободное мѣсто и, наконецъ,—на то же же мѣсто опять всю колонну изъ $(n-1)$ верхнихъ элементовъ.

Обозначая число необходимыхъ отдѣльныхъ перенесеній буквою $П$ со значкомъ, соотвѣтствующимъ числу элементовъ, имѣемъ, слѣдовательно:

$$П_n = 2 \cdot П_{n-1} + 1.$$

Понижая значеніе n до единицы и дѣлая подстановку, легко находимъ:

$$П_n = 2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdot \cdot \cdot + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0.$$

Получаемъ, слѣдовательно, сумму геометрической прогрессіи, которая даетъ

$$П_n = 2^n - 1.$$

Такимъ образомъ, въ случаѣ Ханойской башни, т. е. при 8 кружкахъ, нужно сдѣлать $2^8 - 1$ или 255 отдѣльныхъ переложеній кружковъ.

Легенда.

Если выше вмѣсто 8 кружковъ возьмемъ 64 кружка, то получимъ задачу, связанную съ древне-индійскій легендой. Легенда эта гласитъ, будто въ городѣ Бенаресѣ, подъ куполомъ главнаго храма, въ томъ мѣстѣ, гдѣ находится середина Земли, богъ Брама поставилъ вертикально на бронзовой площадкѣ три алмаз-

156

ныя палочки, каждая длиною въ локоть и толщиною въ корпусъ пчелы. При сотвореніи міра на одну изъ этихъ палочекъ были одѣты 64 кружка изъ чистаго золота съ отверстіями посрединѣ,—такъ, что они образовали родъ усѣченнаго конуса, такъ какъ діаметры ихъ шли въ возрастающемъ порядкѣ, начиная сверху. Жрецы, смѣняемые одинъ другимъ, днемъ и ночью безъ устали трудятся надъ перенесеніемъ этой колонны кружковъ съ первой палочки на третью, пользуясь второй какъ вспомогательной, при чемъ они обязаны соблюдать уже указанныя условія, т. е. 1) не переносить за одинъ разъ болѣе одного кружка, и 2) класть снятый кружокъ или на свободную въ этотъ моментъ палочку, или накладывать его на кружокъ только большаго діаметра. Когда, соблюдая всѣ эти условія, жрецы перенесутъ всѣ 64 кружка съ первой палочки на 3-ю,—наступитъ конецъ міра...

Допустимъ, что переносъ одного кружка продолжается всего одну секунду, тогда на перемѣщеніе ханойской башни изъ восьми кружковъ потребуется 4 минуты слишкомъ. Что же касается переноса башни въ 64 кружка, то на это понадобится.

18 446 744 073 709 551 615 сек.

А это значитъ, не болѣе и не менѣе, какъ **пять слишкомъ милліардовъ вѣковъ (столѣтій).**

Міръ Брамы, очевидно, продержится еще очень и очень много лѣтъ.

Если кружки и палочки въ данной игрѣ замѣнить входящими другъ въ друга колпачками, то получаемъ игру, называемую **Тонкинскимъ вопросомъ** или **Китайскими шляпами.**

Вмѣсто кружковъ или колпачковъ, желающіе могутъ употреблять обыкновенныя игральныя карты.

Hiện nay, trên mạng Internet có rất nhiều chương trình viết trên nhiều ngôn ngữ khác nhau và rất nhiều phần mềm với hình ảnh hướng dẫn trò chơi Tháp Hà Nội (với ba cọc hoặc bốn cọc, trò chơi Tháp Hà Nội cải biên: trò chơi Tháp Hà Nội vơi các đĩa màu, trò chơi Tháp Hà Nội xoay vòng,...).

Trò chơi Tháp Hà Nội cũng được cài đặt trên nhiều điện thoại. Ngoài ra, có thể tìm mua trò chơi Tháp Hà Nội làm bằng gỗ hoặc sứ tại các cửa hàng Việt Nam hoặc nước ngoài để giải trí.

(Còn tiếp)

Tài liệu trích dẫn

[1] Phạm Trà Ân, Bài toán Tháp Hà Nội, Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ, số 280, tháng 10-2000.

[2] Phạm Trà Ân, Bài toán Tháp Hà Nội-Cái nhìn từ lý thuyết Độ phức tạp tính toán, Tạp chí Thông tin Toán học, Tập 6, Số 2, tháng 8 năm 2002, trang 10-13.

[3] Vũ Đình Hòa, Bài toán Tháp Hà Nội, Tạp chí Toán Tuổi thơ 2, Số 68, tháng 10-2008.

[4] Nguyễn Xuân Tấn, Bài toán "Tháp Hà Nội"-một bài toán hóc búa hơn một trăm năm nay, Tạp chí Thông tin Toán học, Tập 6 Số 1, tháng 3, 2002, trang 2-4.

[5] Tạ Duy Phượng, Trò chơi Tháp Hà Nội-Lịch sử và bài toán tổng quát, Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ, số 280, tháng 1-2010.

[6] Nguyễn Thị Hồng Phượng, Thuật toán Frame-Stewart giải bài toán Tháp Hà Nội tổng quát, Luận văn Cao học, Đại học Sư phạm Thái Nguyên, 2010.

[7] Mao Thị Hiền, Trò chơi Tháp Hà Nội và một số vấn đề liên quan, Luận văn Cao học, Đại học Quốc gia Hà Nội, 2013.

[8] Vũ Hoàng Đạo, Bài toán Tháp Hà Nội với đĩa màu, Luận văn Cao học, Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên, 2015.

[9] Trần Thị Hồng Nhung, Bài toán Tháp Hà Nội với chuyển động xoay vòng, Luận văn Cao học, Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên, 2015.

[10] Vũ Thu Trang, Một số công thức truy hồi trong bài toán Tháp Hà Nội tổng quát, Luận văn Cao học, Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên, 2015.

[11] R. E. Allardie and A. Y. Fraser, La Tour d'Hanoi, Proceeding of the Edinburgh Mathematical Society 2 (1884), 50-53.

[12] M. Atkinson, The cyclic Towers of Hanoi problem, Information Processing Letters, Vol. 13, No 3 (1981), 118-119. MR0645457 (83f:68004)

[13] W. W. Rouse Ball, Mathematical Recreations and Essays, Macmillan and Co., London, Sixth Edition, (1914).

[14] Henry Ernest Dudeney, The Canterbury Puzzles (and other curious problems), Thomas Nelson and Sons, Ltd., London, 1907; New York, E. P. Dutton and Company, 1908.

[15] Otto Dunkel, Editorial note concerning advanced problem 3918, Amer. Math. Monthly 48 (1941), 219.

[16] M. C. Er, The Colour Towers of Hanoi: A Generalization, The Computer Journal, Vol. 27 (1984), No. 1, 80-82.

[17] J. S. Frame, Solution to advanced problem 3918, Amer. Math. Monthly 48 (1941), 216-217.

[18] Ronal L. Graham, Donal E. Knuth, and Oren Patashnik, Concrete mathematics: A foundation for computer sciences, Addison-Wesley, Reading, MA, 1989. Second Edition, 1994.

[19] Andreas M. Hinz, The Tower of Hanoi, Enseign. Math. (2) 35 (1989), 289-321.

[20] Andreas M. Hinz, Pascal's Triangle and the Tower of Hanoi, American Mathematical Monthly, Vol. 99 No. 6, p. 538-544, June-July 1992.

[21] Andreas M. Hinz, Sandi Klavžar, Uroš Milutinović, and Ciril Petr, The Tower of Hanoi – Myths and Maths, Birkhäuser, 2013, 2018.

[22] Zoltán Kátai, Lehel István Kovács, Tower of Hanoi-where programming techniques blend, Acta Univ. Sapientiae, Informatica 1, 1 (2009), pp. 89-108.

[23] Sandi Klavžar, Uroš Milutinović, and Ciril Petr, On the Frame-Stewart algorithm for the multi-peg Tower of Hanoi problem, Discrete Appl. Math. 120 (2002), no. 1-3, 141-157.

[24] Édouard Lucas, Nouveaux jeux scientifiques de M. Édouard Lucas, La Nature, 17th year, 2nd semester (1889), no. 855 (October 5), 301-303.

[25] Édouard Lucas, L'Arithméique Amusante: Introduction aux Récréations Mathematicques, Gauthier-Villars, Paris, 1895, pp. 179-183.

[26] A.A.K. Majumdar, The Classical Tower of Hanoi Problem and Its Generalizations, Vol. 1: Multi-Peg Generalization, LAMBERT Academic Publishing, 2012.

[27] Henri de Parville, Récréations mathématiques: La tour d'Hanoi et la question du Tonkin, La Nature, 12th year, 1st semester, no. 565 (March 29, 1884), 285-286.

[28] David G. Poole, The towers and triangles of Professor Claus (or, Pascal knows Hanoi), Mathematics Magazine, 67 (1994), 323-344.

[29] A. Sapir, The Towers of Hanoi with Forbidden Moves, The Computer Journal, 47 (1) (2004), 20-24.

[30] R. S. Scorer, P. M. Grundy, and C. A, B. Smith, Some Binary games, Mathematics Magazine, 28 (1944), No 280 (July), 96-103.

[31] B. M. Stewart, Advanced problem 3918, Amer. Math. Monthly 46 (1939), 363.

[32] B. M. Stewart, Solution to advanced problem 3918, Amer. Math. Monthly 48 (1941), 217-219.

[33] Paul K. Stockmeyer, Variations on the four-post Tower of Hanoi puzzle, Congr. Numer. 102 (1994), 3-12.

[34] Paul K. Stockmeyer, The Tower of Hanoi: A Bibliography, http://w.w.w.cs.wm.edu/~pkstoc/hpapers.html, Version 2.2, 22/10/2005.

[35] P.K. Stockmeyer, Fred Lunnon, New Variations on the Tower of Hanoi, Thirteenth International Conference on Fibonaci Numbers and Their Applications, July 7-11, 2008, Patras, Greece.

[36] Symposium La "Tour d'Hanoi"-un casse-tete mathématique d'E'duard Lucas (1842-1891), Institute Henri Poicaré, Paris V, 5-8 février 2009.

[37] Yu-Kuo Wang, Analysis on an Iterative algorithm of "The Tower of Hanoi problem" with Parallel Moves, M. Sc. Thesis, Institute of Computer Science and Information Engineering, Chung Hoa University, 1999.

[38] Derick Wood, Towers of Brahma and Hanoi Revisited, J. Recr. Math. 14 (1981), No 1, 17-24.

[39] Workshop on the Tower of Hanoi and Related Problems, September 18–22, 2005, Maribor, Slovenia.

[40] E. I. Igratiev, Trong vương quốc sáng tạo hay Số học cho mọi người, Quyển 1, S.-Peterburg, 1914 (Tái bản lần thứ tư, tiếng Nga).