

XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN TRONG CHƯƠNG TRÌNH PHỔ THÔNG 2018

TS. Nguyễn Ngọc Luân & TS. Lương Đức Trọng
Trường THCS & THPT Lương Thế Vinh

Hà Nội, tháng 12-2024

Hình thành khái niệm xác suất có điều kiện

Khởi động 1:

Một công ty tổ chức chương trình bốc thăm trúng thưởng cuối năm cho 50 nhân viên. Trong hộp có 50 vé, mỗi nhân viên sẽ bốc một vé. Có 2 vé trúng thưởng xe máy, 5 vé trúng thưởng điện thoại và 10 vé trúng thưởng voucher mua sắm.

- 1 **Biết rằng** nhân viên đầu tiên bốc được vé trúng thưởng (xe máy, điện thoại hoặc voucher), tính xác suất đó là vé trúng xe máy.
- 2 **Biết rằng** nhân viên đầu tiên bốc được vé trúng thưởng, tính xác suất nhân viên thứ hai bốc được vé trúng thưởng.
- 3 **Biết rằng** nhân viên đầu tiên bốc được vé không trúng thưởng, tính xác suất nhân viên thứ hai bốc được vé trúng thưởng.

- 1 Nếu nhân viên bốc đầu tiên trúng thưởng, chiếc vé đó sẽ có 2 cơ hội thuộc về 2 vé trúng xe máy trong số 17 chiếc vé trúng thưởng. Vậy xác suất để trúng thưởng xe máy trong trường hợp này là $\frac{2}{17}$.
- 2 Nếu người bốc đầu tiên trúng thưởng, cơ hội trúng thưởng của người thứ hai sẽ giảm xuống còn $\frac{16}{49}$.
- 3 Nếu người bốc đầu tiên không trúng thưởng, cơ hội trúng thưởng của người thứ hai sẽ tăng lên là $\frac{17}{49}$.

Hình thành khái niệm xác suất có điều kiện

Ví dụ

Có hai hộp bi. Các viên bi có cùng kích thước và khối lượng.

Hộp thứ nhất chứa 3 viên bi vàng và 2 viên bi trắng.

Hộp thứ hai chứa 1 viên bi vàng và 4 viên bi trắng.

Bạn Khoa lấy ra ngẫu nhiên 1 viên bi từ hộp thứ nhất bỏ vào hộp thứ hai, sau đó lại lấy ra ngẫu nhiên 1 viên bi từ hộp thứ hai.

Gọi A là biến cố "*Viên bi lấy ra lần thứ nhất là bi vàng*";

B là biến cố "*Viên bi lấy ra lần thứ hai là bi trắng*".

- 1 Biết rằng biến cố A xảy ra, tính xác suất của biến cố B .
- 2 Biết rằng biến cố A không xảy ra, tính xác suất của biến cố B .

Lúc đầu Hộp 1 có 3V và 2T; Hộp 2 có 1V và 4T.

- 1 Nếu A xảy ra. Khi đó, Khoa chuyển 1V từ hộp 1 sang hộp 2. Hộp 2 lúc này có 2V và 4T. Xác suất để xảy ra B là $p_1 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.
- 2 Nếu A không xảy ra. Khi đó, Khoa chuyển 1T từ hộp 1 sang hộp 2. Hộp 2 lúc này có 1V và 5T. Xác suất để xảy ra B là $p_2 = \frac{5}{6}$.

Xác suất điều kiện là gì?

- Xác suất xảy ra của một biến cố được tính toán dựa trên các thông tin ta biết về phép thử. Khi thông tin thay đổi, xác suất xảy ra của biến cố cũng thay đổi theo.
- Để chỉ ra một cách cụ thể về việc xác suất của một sự kiện A nào đó phụ thuộc vào một điều kiện B nào đó ra sao, người ta đưa ra khái niệm xác suất có điều kiện.

Xây dựng công thức xác suất có điều kiện

Giả sử không gian mẫu Ω gồm $n(\Omega)$ kết quả đồng khả năng, trong đó:

- $n(A)$ kết quả thuận lợi cho A ;
- $n(B)$ kết quả thuận lợi cho B ;
- $n(A \cap B)$ kết quả thuận lợi cho $A \cap B$, tức là thuận lợi cho cả A và B .

Ký hiệu $P(B | A)$ là *xác suất của biến cố B khi biết rằng sự kiện A đã xảy ra*. Khi biến cố A xảy ra thì không gian mẫu thay đổi số lượng thành $n(A)$ và có $n(A \cap B)$ kết quả thuận lợi cho B . Do đó

$$P(B | A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{n(A \cap B)/n(\Omega)}{n(A)/n(\Omega)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Công thức xác suất có điều kiện

$$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Thực hành tính xác suất có điều kiện

Ví dụ (tính xác suất có điều kiện theo định nghĩa xác suất)

Một lớp học có 40 sinh viên, trong đó có 25 sinh viên nữ và 15 sinh viên nam. Có 10 sinh viên nữ và 5 sinh viên nam tham gia câu lạc bộ bóng rổ.

Một sinh viên được chọn ngẫu nhiên từ lớp học. Tính xác suất sinh viên đó là nữ, biết rằng sinh viên đó tham gia câu lạc bộ bóng rổ.

Gọi G là biến cố "sinh viên là nữ" và R là biến cố "sinh viên tham gia câu lạc bộ bóng rổ". Ta cần tính $P(G|R)$ - xác suất sinh viên là nữ biết rằng sinh viên đó tham gia câu lạc bộ bóng rổ.

Ta có

$$P(G|R) = \frac{n(G \cap R)}{n(R)} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}.$$

Thực hành tính xác suất có điều kiện

Ví dụ (tính xác suất có điều kiện theo công thức xác suất)

Một trường đại học có hai phương thức tuyển sinh là xét tuyển học bạ (A) và thi tuyển (B).

- Xác suất thí sinh đủ điều kiện trúng tuyển bằng phương thức xét tuyển học bạ là $P(A) = 0,35$.
- Xác suất thí sinh đủ điều kiện trúng tuyển bằng phương thức thi tuyển là $P(B) = 0,25$.
- Xác suất thí sinh đủ điều kiện trúng tuyển bằng cả hai phương thức là $P(A \cap B) = 0,1$.

Một thí sinh được chọn ngẫu nhiên.

- 1 Tính xác suất để thí sinh đủ điều kiện trúng tuyển.
- 2 Biết thí sinh này trúng tuyển bằng phương thức xét tuyển học bạ, tính xác suất thí sinh đó cũng trúng tuyển bằng phương thức thi tuyển.

Thực hành tính xác suất có điều kiện

- 1 Để tính xác suất thí sinh trúng tuyển, ta cần tính $P(A \cup B)$ - xác suất thí sinh trúng tuyển bằng ít nhất một trong hai phương thức. Ta có công thức:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,35 + 0,25 - 0,1 = 0,5.$$

- 2 Đây là xác suất có điều kiện. Ta biết thí sinh trúng tuyển bằng phương thức xét tuyển học bạ, và cần tính xác suất thí sinh đó cũng trúng tuyển bằng phương thức thi tuyển. Ta dùng công thức xác suất có điều kiện:

$$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,1}{0,35} = \frac{2}{7}.$$

Công thức nhân xác suất

Cho hai biến cố A và B .

Từ $P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ suy ra $P(A \cap B) = P(B | A)P(A)$

Công thức nhân xác suất

- Với hai biến cố A và B thì

$$P(AB) = P(A).P(B|A).$$

- Với ba biến cố A, B và C thì

$$P(ABC) = P(A).P(B|A).P(C|AB)$$

Ví dụ

Theo thống kê, 80% số vụ tai nạn giao thông xảy ra do lỗi của người lái xe, trong đó 30% lái xe có sử dụng rượu bia và 70% lái xe không sử dụng rượu bia.

Một vụ tai nạn giao thông vừa xảy ra. Tính xác suất vụ tai nạn này do lỗi của người lái xe có sử dụng rượu bia.

Gọi A là biến cố "tai nạn do lỗi người lái xe" và B là biến cố "người lái xe có sử dụng rượu bia". Ta có:

- $P(A) = 0,8$ (xác suất tai nạn do lỗi người lái xe)
- $P(B|A) = 0,3$ (xác suất tai nạn liên quan đến rượu bia, biết rằng tai nạn do lỗi người lái xe)

Để tính xác suất vụ tai nạn này do lỗi của người lái xe có sử dụng rượu bia, ta dùng công thức nhân xác suất:

$$P(A \cap B) = P(A).P(B | A) = 0,8.0,3 = 0,24.$$

Ví dụ

Một nhà máy sản xuất điện thoại di động có 3 công đoạn kiểm tra chất lượng: kiểm tra linh kiện (A), kiểm tra phần mềm (B) và kiểm tra ngoại hình (C).

- Xác suất một chiếc điện thoại vượt qua kiểm tra linh kiện là $P(A) = 0,95$.
- Xác suất một chiếc điện thoại vượt qua kiểm tra phần mềm (biết nó đã vượt qua kiểm tra linh kiện) là $P(B | A) = 0,9$.
- Xác suất một chiếc điện thoại vượt qua kiểm tra ngoại hình (biết nó đã vượt qua kiểm tra linh kiện và phần mềm) là $P(C | A \cap B) = 0,98$.

Tính xác suất một chiếc điện thoại vượt qua cả ba công đoạn kiểm tra.

Để tính xác suất điện thoại vượt qua cả ba công đoạn, ta cần tính $P(A \cap B \cap C)$. Ta áp dụng công thức nhân xác suất cho ba biến cố:

$$\begin{aligned}P(A \cap B \cap C) &= P(A).P(B | A).P(C | A \cap B) \\&= 0,95.0,9.0,98 \\&= 0,8379.\end{aligned}$$

Công thức Bayes

Công thức Bayes

Với hai biến cố A và B thì

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}.$$

Ví dụ (công thức Bayes)

Tỷ lệ người thích uống cà phê trong một thành phố là 0,7 ($P(A)$). Một cuộc khảo sát cho thấy xác suất một người được hỏi trả lời "Có" khi được hỏi "Bạn có thích uống cà phê không?" là 0,75 ($P(B)$). Biết rằng trong số những người thích uống cà phê, xác suất họ trả lời "Có" là 0,9 ($P(B|A)$). Nếu một người trả lời "Có", tính xác suất người đó thực sự thích uống cà phê ($P(A|B)$).

Gọi A là biến cố người đó thích uống cà phê.
Gọi B là biến cố người đó trả lời "Có".

$$P(A) = 0,7, P(B) = 0,75, P(B|A) = 0,9.$$

Theo công thức Bayes:

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)} = \frac{0,7 \cdot 0,9}{0,75} = 0,84.$$

Vậy xác suất người đó thực sự thích uống cà phê khi trả lời "Có" là 84%.

Công thức xác suất toàn phần

Công thức xác suất toàn phần

Với hai biến cố A và B thì

$$P(B) = P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A}).$$

Bài toán xét nghiệm

Ví dụ (Công thức xác suất toàn phần cho hai biến cố)

Một loại bệnh hiếm gặp ảnh hưởng đến 0,1% dân số. Có một xét nghiệm y tế để phát hiện bệnh này, với độ chính xác như sau:

- Nếu một người mắc bệnh, xét nghiệm cho kết quả dương tính với xác suất 95%.
 - Nếu một người không mắc bệnh, xét nghiệm cho kết quả dương tính với xác suất 2% (dương tính giả).
- 1 Tính xác suất một người được xét nghiệm ngẫu nhiên cho kết quả dương tính.
 - 2 Nếu một người xét nghiệm cho kết quả dương tính thì khả năng người đó mắc bệnh là bao nhiêu?

Gọi B là biến cố "người mắc bệnh" và D là biến cố "xét nghiệm dương tính".
Ta có:

- $P(B) = 0,001$ (xác suất người mắc bệnh)
- $P(\overline{B}) = 0,999$ (xác suất người không mắc bệnh)
- $P(D | B) = 0,95$ (xác suất xét nghiệm dương tính biết người mắc bệnh)
- $P(D | \overline{B}) = 0,02$ (xác suất xét nghiệm dương tính biết người không mắc bệnh)

Áp dụng công thức xác suất toàn phần:

$$\begin{aligned}P(D) &= P(B).P(D | B) + P(\overline{B}).P(D | \overline{B}) \\&= 0,001.0,95 + 0,999.0,02 = 0,02093.\end{aligned}$$

Nếu một người xét nghiệm cho kết quả dương tính thì khả năng người đó mắc bệnh là

$$P(B|D) = \frac{P(D|B).P(B)}{P(D)} = \frac{0,001.0,95}{0,02093} \approx 0,0453.$$

Làm sao tăng tính hiệu quả của xét nghiệm???

Nếu $P(D | B) = 1$ và $P(D | \bar{B}) = 0,02$ thì

$$P(B|D) = \frac{P(D|B).P(B)}{P(D)} = \frac{0,001.1}{0,001.1 + 0,999.0,02} \approx 0,048.$$

Nếu $P(D | B) = 0,95$ và $P(D | \bar{B}) = 0,005$ thì

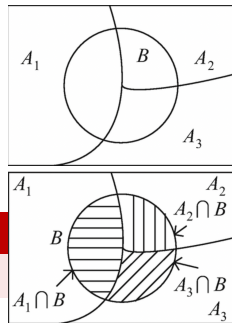
$$P(B|D) = \frac{P(D|B).P(B)}{P(D)} = \frac{0,001.0,95}{0,001.1 + 0,999.0,005} \approx 0,160.$$

Với ba biến cố A_1, A_2, A_3 thỏa mãn

- $A_1 A_2 = A_2 A_3 = A_3 A_1 = \emptyset$
- $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \Omega$

Công thức xác suất toàn phần

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3).$$



Ví dụ (Công thức xác suất toàn phần cho 3 biến cố)

Một bài kiểm tra trắc nghiệm có ba dạng câu hỏi: Dễ, Trung bình, và Khó. Tỷ lệ câu hỏi Dễ, Trung bình, và Khó lần lượt là 30%, 50%, và 20%. Một học sinh có khả năng trả lời đúng câu hỏi Dễ là 90%, câu hỏi Trung bình là 70%, và câu hỏi Khó là 40%. Chọn ngẫu nhiên một câu hỏi trong bài kiểm tra. Tính xác suất học sinh đó trả lời đúng.

Gọi T là biến cố học sinh trả lời đúng.

Gọi D , B , K lần lượt là các biến cố câu hỏi Dễ, Trung bình, Khó.

$$P(D) = 0,3, P(B) = 0,5, P(K) = 0,2$$

$$P(T|D) = 0,9, P(T|B) = 0,7, P(T|K) = 0,4$$

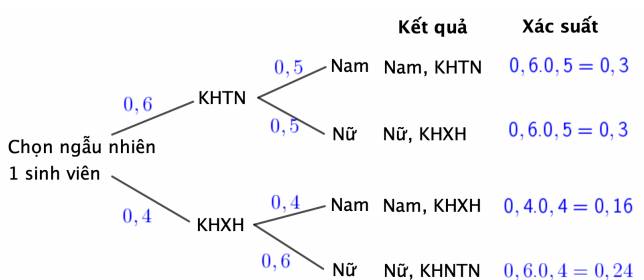
Theo công thức xác suất toàn phần, ta có:

$$\begin{aligned} P(T) &= P(D)P(T|D) + P(B)P(T|B) + P(K)P(T|K) \\ &= 0,3.0,9 + 0,5.0,7 + 0,2.0,4 = 0,7. \end{aligned}$$

Vậy xác suất học sinh đó trả lời đúng là 0,7 hay 70%.

Ví dụ (Sơ đồ cây hai nhánh)

Một đại học có hai trường thành viên: Trường Khoa học Tự nhiên (KHTN) và trường Khoa học Xã hội (KHXX). Tỷ lệ sinh viên của hai trường lần lượt là 60% và 40%. Tỷ lệ sinh viên nữ của từng trường lần lượt là 50% và 40%. Chọn ngẫu nhiên một sinh viên. Tính xác suất sinh viên đó là nữ.



Xác suất để sinh viên được chọn là nữ

$$P = 0,6 \cdot 0,5 + 0,6 \cdot 0,4 = 0,54.$$

Năng lực tư duy và lập luận toán học

Thông hiểu

Cho A và B là hai biến cố độc lập. Biết $P(A|B) = 0,3$ và $P(B) = 0,5$. Xác suất xảy ra biến cố A biết rằng biến cố B không xảy ra là

- A. 0,3 B. 0,2 C. 0,15 D. 0,8

Vận dụng

Cho hai biến cố A và B . Biết $P(A | B) = 0,6$; $P(B | A) = 0,3$ và $P(A \cup B) = 0,8$. Tính $P(A | \bar{B})$.

Lời giải

Đặt $P(A \cap B) = x$.

Vì $P(A | B) = 0,6$ nên $\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 0,6$. Suy ra $P(B) = \frac{x}{0,6}$.

Vì $P(B | A) = 0,3$ nên $\frac{P(B \cap A)}{P(A)} = 0,3$. Suy ra $P(A) = \frac{x}{0,3}$.

Vì $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{x}{0,3} + \frac{x}{0,6} - x = 4x$.

Suy ra $x = 0,2$.

Tính được $P(\bar{B}) = 1 - \frac{x}{0,6} = \frac{2}{3}$

và $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{7}{15}$.

Do đó $P(A | \bar{B}) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{7/15}{2/3} = 0,7$.

Năng lực tư duy và lập luận toán học

Ví dụ

Trong túi bạn Điệp có 1 viên bi đen và 6 viên bi xám. Trong túi bạn Lan có 4 viên bi đen, 2 viên bi xám và 3 viên bi bạc. Các viên bi có cùng kích thước và khối lượng. Bạn Điệp chọn ngẫu nhiên 1 viên bi để tặng Lan. Sau khi nhận bi của Điệp, bạn Lan cho vào túi rồi từ đó lại chọn ra ngẫu nhiên đồng thời 2 viên bi để tặng lại cho Điệp.

- (NB) Biết rằng Điệp tặng Lan bi đen, tính xác suất Lan tặng lại cho Điệp hai viên bi xám.
- (TH) Tính xác suất để 3 viên bi được chọn đều có cùng màu.
- (VD) Biết rằng 3 viên bi được chọn có 3 màu khác nhau, tính xác suất bạn Điệp tặng Lan viên bi màu xám.

- NB: Câu hỏi này yêu cầu tính xác suất có điều kiện đơn giản. Ta chỉ cần xét trường hợp cụ thể (Điệp tặng Lan bi màu gì) và tính xác suất của sự kiện Lan tặng lại Điệp 2 bi màu gì dựa trên thông tin đã cho.
- TH: Câu hỏi này yêu cầu tính xác suất của hợp các biến cố. Ta cần xét tất cả các trường hợp mà 3 viên bi được chọn cùng màu (Điệp tặng bi màu xanh, Lan tặng lại 2 bi màu xanh) và tính tổng xác suất của các trường hợp đó.
- VD: Câu hỏi này yêu cầu tính xác suất có điều kiện phức tạp hơn, liên quan đến công thức Bayes. Ta cần tính xác suất Điệp tặng Lan bi màu gì, biết rằng 3 viên bi được chọn có 3 màu khác nhau.

Năng lực giải quyết vấn đề toán học

Ví dụ

Trước khi ông của Nam gieo hai con xúc xắc cân đối và đồng chất, ông yêu cầu Nam đoán xem tích số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc là bao nhiêu. Nếu Nam đoán đúng, ông sẽ thưởng cho Nam một quyển truyện tranh.

- (TH) Để khả năng được thưởng là cao nhất, Nam phải đoán tích số chấm là bao nhiêu?
- (VD) Biết rằng tổng số chấm xuất hiện là số chẵn, để khả năng được thưởng là cao nhất, Nam phải đoán tích số chấm là bao nhiêu?

- TH: Câu hỏi chỉ yêu cầu tìm giá trị có xác suất xuất hiện cao nhất (tích số chấm) mà không có thêm điều kiện gì. Học sinh chỉ cần liệt kê tất cả các trường hợp có thể xảy ra (lập bảng), đếm số lần xuất hiện của mỗi kết quả, so sánh và chọn ra kết quả xuất hiện nhiều nhất.
- VD: Câu hỏi đưa ra thêm điều kiện ràng buộc (ví dụ: "biết rằng tổng số chấm xuất hiện là số chẵn" hoặc "biết rằng tích số chấm xuất hiện là số lẻ"). HS cần kết hợp kiến thức về xác suất, logic, và khả năng phân tích, suy luận.

Năng lực Mô hình hóa

Ví dụ

Hệ thống An ninh Mạng là một phần mềm phát hiện các cuộc tấn công mạng. Nếu một kết nối mạng là độc hại, hệ thống sẽ gắn cờ cảnh báo với xác suất là 0,95. Ngược lại, nếu một kết nối mạng là an toàn, hệ thống vẫn có thể gắn cờ cảnh báo với xác suất 0,02. Thống kê trong một số lượng lớn các kết nối mạng, tỉ lệ kết nối độc hại là 20%.

(VD) Xác định tỉ lệ kết nối mạng bị gắn cờ cảnh báo là độc hại.

Xây dựng câu hỏi đúng/sai

Ví dụ

Một lô hạt giống gồm 90 hạt loại I và 10 hạt loại II. Các hạt giống có kích thước và khối lượng giống hệt nhau.

Xác suất để một hạt loại I nảy mầm là 0,8 còn xác suất này của hạt loại II là 0,4.

Chọn ngẫu nhiên một hạt trong lô để gieo.

- 1 (NB) Số phần tử của không gian mẫu là 90.
- 2 (NB) Xác suất hạt được chọn thuộc loại II là 0,1.
- 3 (NB) Xác suất hạt được chọn nảy mầm lớn hơn 0,7.
- 4 (TH) Biết rằng hạt được chọn nảy mầm, xác suất hạt đó thuộc loại II nhỏ hơn 0,1.

Câu hỏi vận dụng cao

Ví dụ

Một lớp học có 3 tổ học sinh. Có 12 học sinh mới chuyển vào lớp, mỗi học sinh được phân ngẫu nhiên vào 1 trong 3 tổ. Mỗi tổ đều có thể chứa đến 12 học sinh. Biết rằng tổ nào cũng có ít nhất 3 học sinh mới, tính xác suất để mỗi tổ có đúng 4 học sinh mới (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

Một số lưu ý

Lỗi thường gặp

$P(A \cap B)$ hay $P(A | B)$?

- Từ khoá "biết rằng", "biết".
- Đặt A và B vào trong cùng một lệnh hỏi.

(TL) Biết rằng A , tính xác suất của B .

(TL) Tính xác suất của B biết rằng A .

(TN) Biết rằng A xảy ra, xác suất để B xảy ra là...

Đề nghị

Đề bài không nên đưa ra câu hỏi không rõ ràng.

Một số phương pháp giải đơn giản

- Dùng biểu đồ Venn.
- Dùng sơ đồ cây.

Một số hướng xây dựng câu hỏi vận dụng

- Bài toán thực tế, học sinh phải mô hình hoá.
- Bài toán chỉ sử dụng công thức. Đặt ẩn, đưa về giải phương trình.